2015年度 第1回 全統マーク模試

数学Ⅰ・数学A

【解答・採点基準】 (100点満点)

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第1問	アa	$2a$	2	
	イa^2−ウa＋エ	$2a^2-4a+3$	2	
	オ	1	1	
	カ	1	2	
	キa^2−クa＋$\frac{ケ}{コ}$	$3a^2-6a+\frac{9}{2}$	3	
	サ	1	1	
	$\frac{シ}{ス}$	$\frac{3}{2}$	2	
	セ	3	1	
	$\frac{ソタ}{チ}$	$\frac{27}{2}$	2	
	ツ	4	2	
	テ	8	2	
第1問 自己採点小計			(20)	
第2問	$\frac{アイ-\sqrt{ウ}}{エ}$	$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$	2	
	オ	1	2	
	カ	3	3	
	キ	2	3	
	ク	9	2	
	$\frac{ケ\sqrt{コ}}{サ}$	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$	2	
	$\frac{シス\sqrt{セ}}{ソ}$	$\frac{27\sqrt{2}}{8}$	2	
	タチ$\sqrt{ツ}$	$10\sqrt{2}$	2	
	$\frac{テト\sqrt{ナ}}{ニ}$	$\frac{20\sqrt{2}}{9}$	3	
	$\frac{ヌネ\sqrt{ノ}}{ハ}$	$\frac{21\sqrt{2}}{4}$	4	
第2問 自己採点小計			(25)	

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第3問	ア	5	2	
	イ	3	2	
	ウ	5	2	
	エ	1	2	
	オ	5	1	
	カ	7	1	
	キ	4	3	
	ク	2	2	
第3問 自己採点小計			(15)	
第4問	$\frac{ア}{イ}$	$\frac{1}{4}$	2	
	$\frac{ウ}{エ}$	$\frac{3}{4}$	2	
	$\frac{オ}{カキ}$	$\frac{3}{16}$	2	
	$\frac{ク}{ケコ}$	$\frac{3}{16}$	2	
	$\frac{サ}{シ}$	$\frac{5}{8}$	2	
	$\frac{ス}{セソタ}$	$\frac{9}{128}$	2	
	$\frac{チツ}{4096}$	$\frac{81}{4096}$	2	
	$\frac{テトナ}{ニヌネノ}$	$\frac{135}{1024}$	3	
	$\frac{ハヒ}{フヘ}$	$\frac{27}{77}$	3	
第4問 自己採点小計			(20)	

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第5問	ア	4	1	
	イウ	31	1	
	エオ	16	1	
	カ	0	1	
	キク	31	3	
	ケコx－サシy＝1	$65x-16y=1$	3	
	(ス, セ)	(1, 4)	2	
	(ソタ, チツテ)	(33, 134)	2	
	トナ	31	3	
	ニヌ	17	3	
第5問　自己採点小計			(20)	
第6問	アイ°	60°	3	
	ウエ°	90°	2	
	オ	3	2	
	カ : キ	7 : 3	2	
	$\frac{ク}{ケ}$	$\frac{3}{5}$	2	
	コ : 1	2 : 1	3	
	$\frac{サ\sqrt{シ}}{ス}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	3	
	セソ : タ	10 : 9	3	
第6問　自己採点小計			(20)	
自己採点合計			(100)	

第1問　2次関数

a を実数とし，O を原点とする座標平面上で，x の 2 次関数

$$y=x^2-4ax+6a^2-4a+3 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

のグラフを G とする．G の頂点を P とすると

$$\mathrm{P}\left(\boxed{\text{ア}}\,a,\ \boxed{\text{イ}}\,a^2-\boxed{\text{ウ}}\,a+\boxed{\text{エ}}\right)$$

である．

(1)　P の y 座標を Y とすると，Y は $a=\boxed{\text{オ}}$ のとき，最小値 $\boxed{\text{カ}}$ をとる．

(2)　点 A を $(3,\ 0)$ とする．△OAP の面積を S とすると

$$S=\boxed{\text{キ}}\,a^2-\boxed{\text{ク}}\,a+\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$$

である．

$0\leqq a\leqq 3$ において，S は $a=\boxed{\text{サ}}$ で最小値 $\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ をとり，$a=\boxed{\text{セ}}$ で最大値 $\dfrac{\boxed{\text{ソタ}}}{\boxed{\text{チ}}}$ をとる．

$a=\boxed{\text{サ}}$ のときの ① のグラフを x 軸方向に $\boxed{\text{ツ}}$，y 軸方向に $\boxed{\text{テ}}$ だけ平行移動すると，$a=\boxed{\text{セ}}$ のときの ① のグラフに一致する．

【解説】

$$G:\ y=x^2-4ax+6a^2-4a+3. \quad \cdots ①$$

① は，

$$y=(x-2a)^2+2a^2-4a+3$$

と変形できるから，G の頂点 P の座標は，

$$\mathrm{P}\left(\boxed{2}\,a,\ \boxed{2}\,a^2-\boxed{4}\,a+\boxed{3}\right)$$

である．

☜　放物線 $y=b(x-p)^2+q$ の頂点の座標は，
$(p,\ q)$．

(1)　P の y 座標 Y は，

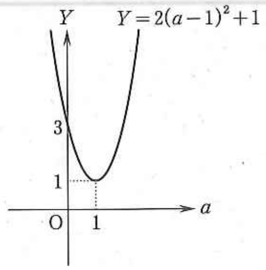
$$\begin{aligned}Y&=2a^2-4a+3\\&=2(a-1)^2+1\end{aligned}$$

と変形できるから，

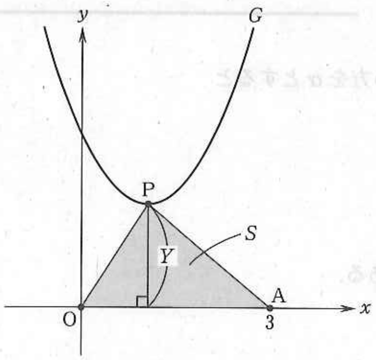
$$a=\boxed{1}\ \text{のとき，最小値}\ \boxed{1}$$

をとる．

☜



(2)　(1) の結果より，a の値にかかわらず，$Y>0$ である．



図より，三角形 OAP の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot Y$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot(2a^2-4a+3)$$

$$=\boxed{3}a^2-\boxed{6}a+\frac{\boxed{9}}{\boxed{2}}$$

である．

$$S=3(a^2-2a)+\frac{9}{2}$$

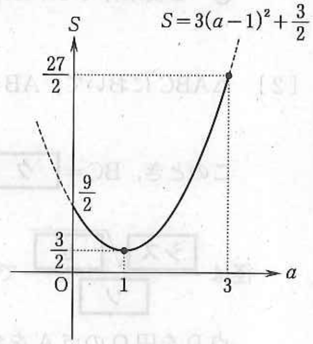
$$=3(a-1)^2+\frac{3}{2}$$

と変形できるから，$0\leqq a\leqq 3$ において，S は，

$a=\boxed{1}$ で　最小値 $\dfrac{\boxed{3}}{\boxed{2}}$，

$a=\boxed{3}$ で　最大値 $\dfrac{\boxed{27}}{\boxed{2}}$

をとる．

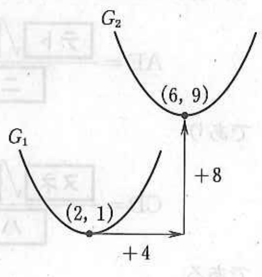


$a=1$，$a=3$ のときの G をそれぞれ G_1，G_2 とすると，

G_1 の頂点の座標は $(2,\ 1)$，

G_2 の頂点の座標は $(6,\ 9)$

であるから，G_1 を x 軸方向に $\boxed{4}$，y 軸方向に $\boxed{8}$ だけ平行移動すると，G_2 に一致する．



第2問　数と式，命題，図形と計量

〔1〕 2次方程式 $x^2+x-1=0$ の解のうち小さい方を α とすると

$$\alpha=\frac{\boxed{\text{アイ}}-\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

である．

(1) $\dfrac{1}{\alpha}-\alpha=\boxed{\text{オ}}$，$\alpha^2+\dfrac{1}{\alpha^2}=\boxed{\text{カ}}$ である．

(2) 集合 A，B を次のように定める．

$$A=\left\{\alpha,\ \frac{1}{\alpha}-\alpha,\ \alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}\right\}$$

$$B=\{x\,|\,x \text{ は } x^2-x-6\leqq 0 \text{ を満たす実数}\}$$

次の $\boxed{\text{キ}}$ に当てはまるものを，下の⓪～③のうちから一つ選べ．

$x\in A$ であることは $x\in B$ であるための $\boxed{\text{キ}}$．

⓪ 必要十分条件である
① 必要条件であるが，十分条件ではない
② 十分条件であるが，必要条件ではない
③ 必要条件でも十分条件でもない

〔2〕 △ABC において，AB＝6，AC＝5，$\cos\angle\text{BAC}=-\dfrac{1}{3}$ とする．

このとき，BC＝$\boxed{\text{ク}}$，　$\sin\angle\text{BAC}=\dfrac{\boxed{\text{ケ}}\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$ であり，△ABC の外接円 O の半径は $\dfrac{\boxed{\text{シス}}\sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である．また，△ABC の面積は $\boxed{\text{タチ}}\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}$ である．

点 D を円 O の点 A を含まない弧 BC 上に，線分 AD と BC が直交するようにとる．このとき，線分 AD と BC の交点を E とすると

$$\text{AE}=\frac{\boxed{\text{テト}}\sqrt{\boxed{\text{ナ}}}}{\boxed{\text{ニ}}}$$

であり

$$\text{CD}=\frac{\boxed{\text{ヌネ}}\sqrt{\boxed{\text{ノ}}}}{\boxed{\text{ハ}}}$$

である．

【解説】

〔1〕

2 次方程式 $x^2+x-1=0$ を解くと，

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

である．

☜ x の 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は，
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

α はこのうちの小さい方であるから，

$$\alpha=\frac{\boxed{-1}-\sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{2}}$$

である．

(1)
$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha}&=\frac{2}{-1-\sqrt{5}}\\&=\frac{2(-1+\sqrt{5})}{(-1-\sqrt{5})(-1+\sqrt{5})}\\&=\frac{2(-1+\sqrt{5})}{1-5}\\&=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha}-\alpha&=\frac{1-\sqrt{5}}{2}-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\\&=\boxed{1}\end{aligned}$$

である．さらに，

$$\begin{aligned}\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}&=\left(\frac{1}{\alpha}-\alpha\right)^2+2\\&=1^2+2\\&=\boxed{3}\end{aligned}$$

である．

☜ $\left(\frac{1}{\alpha}-\alpha\right)^2=\frac{1}{\alpha^2}-2\cdot\frac{1}{\alpha}\cdot\alpha+\alpha^2$
$=\alpha^2-2+\frac{1}{\alpha^2}$
より，
$$\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}=\left(\frac{1}{\alpha}-\alpha\right)^2+2.$$

(2) 2 次不等式 $x^2-x-6\leqq 0$ を解くと，

$$(x+2)(x-3)\leqq 0$$

より，

$$-2\leqq x\leqq 3$$

である．

☜ $\alpha<\beta$ とする．2 次不等式
$$(x-\alpha)(x-\beta)\leqq 0$$
の解は，
$$\alpha\leqq x\leqq\beta.$$

これと(1)の結果より，集合 A，B は，

$$A=\left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2},\ 1,\ 3\right\},$$
$$B=\{x\,|\,-2\leqq x\leqq 3\}$$

である．

☜ $A=\left\{\alpha,\ \frac{1}{\alpha}-\alpha,\ \alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}\right\}.$

ここで，$4<5<9$ より，

$$2<\sqrt{5}<3$$

であるから，

$$-3<-\sqrt{5}<-2$$

☜ 各辺に -1 を掛けた.

$$-4<-1-\sqrt{5}<-3$$

☜ 各辺に -1 を加えた.

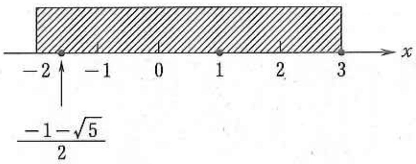
$$-2<\frac{-1-\sqrt{5}}{2}<-\frac{3}{2}$$

☜ 各辺を 2 で割った.

すなわち，

$$-2<\frac{-1-\sqrt{5}}{2}<-1$$

である.



集合 A の要素 $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, 1, 3 はいずれも $-2\leqq x\leqq 3$ を満たすから，

「$x\in A$ ならば $x\in B$」は真である.

また，0 は集合 B の要素であるが，集合 A の要素ではないから，

「$x\in B$ ならば $x\in A$」は偽である.

☜ $x=0$ は反例.

これより，

($x\in A$ である) $\Longrightarrow$ ($x\in B$ である) は真，

($x\in A$ である) $\Longleftarrow$ ($x\in B$ である) は偽

であるから，$x\in A$ であることは $x\in B$ であるための十分条件であるが，必要条件ではない.

☜ 条件 p, q について，

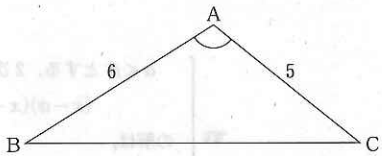
$p\Longrightarrow q$ は真，

$p\Longleftarrow q$ は偽

であるとき，p は q であるための十分条件であるが，必要条件ではない.

よって，$\boxed{\text{キ}}$ に当てはまるものは $\boxed{②}$ である.

［2］



☜ $\cos\angle\mathrm{BAC}=-\frac{1}{3}$.

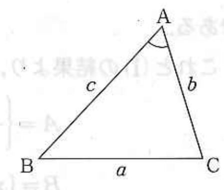
△ABC に余弦定理を用いると，

$$\mathrm{BC}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cos\angle\mathrm{BAC}$$

$$=6^2+5^2-2\cdot6\cdot5\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$=81$$

☜ **余弦定理**



$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

であり，BC>0 であるから，

$$\mathrm{BC}=\boxed{9}$$

である.

また，

$$\sin\angle\mathrm{BAC}=\sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{BAC}}$$
$$=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2}$$
$$=\frac{\boxed{2}\sqrt{\boxed{2}}}{\boxed{3}}$$

☜ $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，
$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$.

である．

$\triangle$ABC の外接円 O の半径を R とし，$\triangle$ABC に正弦定理を用いると，

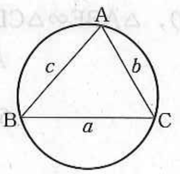
$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin\angle\mathrm{BAC}}=2R$$

であるから，

$$R=\frac{\mathrm{BC}}{2\sin\angle\mathrm{BAC}}$$
$$=\frac{9}{2\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}}$$
$$=\frac{\boxed{27}\sqrt{\boxed{2}}}{\boxed{8}}$$

である．

☜ **正弦定理**



外接円の半径を R とすると，

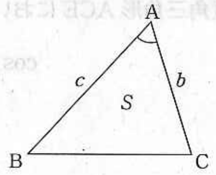
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

また，

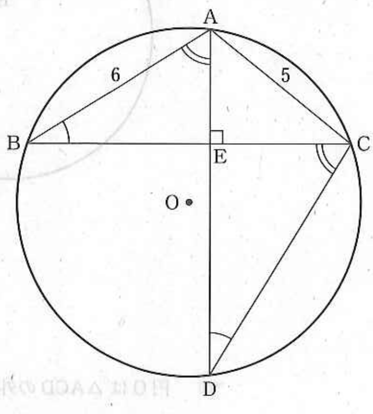
$$(\triangle\mathrm{ABC}\text{ の面積})=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin\angle\mathrm{BAC}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 5\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}$$
$$=\boxed{10}\sqrt{\boxed{2}}$$

である．

☜ **三角形の面積**



$$S=\frac{1}{2}bc\sin A.$$



$\triangle$ABC の面積に注目すると，

$$(\triangle\mathrm{ABC}\text{ の面積})=\frac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AE}$$

であるから，線分 AE の長さは，

$$10\sqrt{2}=\frac{1}{2}\cdot 9\cdot \mathrm{AE}$$

$$\mathrm{AE}=\frac{\boxed{20}\sqrt{\boxed{2}}}{\boxed{9}}$$

である．

直角三角形 ACE に三平方の定理を用いると，

$$\mathrm{CE}=\sqrt{\mathrm{AC}^2-\mathrm{AE}^2}$$

$$=\sqrt{5^2-\left(\frac{20\sqrt{2}}{9}\right)^2}$$

$$=\frac{35}{9}$$

であり，△ABE∽△CDE より，

$$\mathrm{AB}:\mathrm{AE}=\mathrm{CD}:\mathrm{CE}$$

$$6:\frac{20\sqrt{2}}{9}=\mathrm{CD}:\frac{35}{9}$$

$$\frac{20\sqrt{2}}{9}\mathrm{CD}=6\cdot\frac{35}{9}$$

であるから，線分 CD の長さは，

$$\mathrm{CD}=\frac{\boxed{21}\sqrt{\boxed{2}}}{\boxed{4}}$$

である．

☜ $\mathrm{CE}=\sqrt{5^2-\left(\frac{20\sqrt{2}}{9}\right)^2}$

$=\sqrt{5^2-5^2\left(\frac{4\sqrt{2}}{9}\right)^2}$

$=5\sqrt{1-\frac{32}{81}}$

$=5\sqrt{\frac{49}{81}}$

$=5\cdot\frac{7}{9}$

のように計算するとよい．

【CD を求める別解】

直角三角形 ACE において，

$$\cos\angle\mathrm{CAE}=\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AC}}$$

$$=\frac{\frac{20\sqrt{2}}{9}}{5}$$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{9}$$

であるから，

$$\sin\angle\mathrm{CAE}=\sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{CAE}}$$

$$=\sqrt{1-\left(\frac{4\sqrt{2}}{9}\right)^2}$$

$$=\frac{7}{9}$$

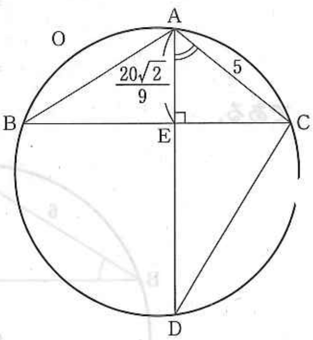
である．

△ACD に正弦定理を用いると，

$$\frac{\mathrm{CD}}{\sin\angle\mathrm{CAD}}=2R$$

であるから，

☜



☜ 円 O は △ACD の外接円でもある．

$$\begin{aligned} \mathrm{CD} &= 2R\sin\angle\mathrm{CAD} \\ &= 2R\sin\angle\mathrm{CAE} \\ &= 2\cdot\frac{27\sqrt{2}}{8}\cdot\frac{7}{9} \\ &= \frac{21\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

である.

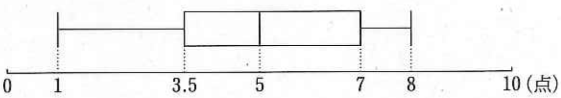
第3問　データの分析

次の表はあるクラスの生徒12人に対して行われた数学Xと数学Yのテスト(各10点満点)の得点の結果をまとめたものである．ただし，テストの得点は整数値をとるものとする．

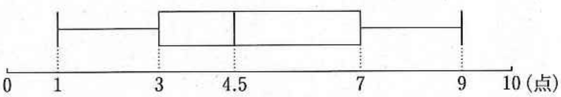
番号	数学X	数学Y
生徒 1	4	8
生徒 2	6	8
生徒 3	1	3
生徒 4	8	9
生徒 5	3	5
生徒 6	9	10
生徒 7	A	B
生徒 8	2	4
生徒 9	7	B
生徒10	4	6
生徒11	7	8
生徒12	4	9

(1)　下の $\boxed{\text{イ}}$ には，次の⓪～③のうちから当てはまるものを一つ選べ．ただし，12人の数学Xの得点のデータについて，⓪～③の中に正しい箱ひげ図が一つ含まれているとする．

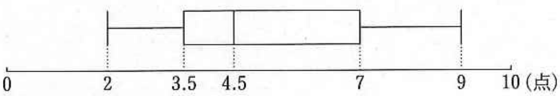
⓪



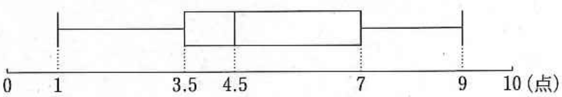
①



②



③



このとき，生徒7の数学Xの得点Aの値は $\boxed{\text{ア}}$ であり，数学Xの得点のデータの箱ひげ図として正しいものは $\boxed{\text{イ}}$ である．

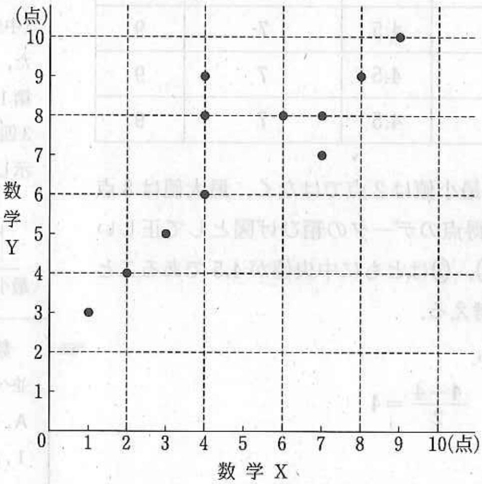
以下，Aの値は $\boxed{\text{ア}}$ とする．

(2)　下の $\boxed{\text{エ}}$ には，次の⓪～④のうちから当てはまるものを一つ選べ．

⓪　1.37　　①　2.35　　②　2.75　　③　5.50　　④　11.00

12 人の数学 X の得点の平均値は $\boxed{ウ}$ 点であり，標準偏差に最も近い値は $\boxed{エ}$ である.

(3) 次の散布図は数学 X の得点のデータを横軸に，数学 Y の得点のデータを縦軸にとったものであるが，11 人のデータとなっている．散布図にない残り 1 人の生徒の得点は，数学 X については $\boxed{オ}$ 点であり，数学 Y については $\boxed{カ}$ 点である.



以下，12 人全員のデータについて考える.

下の $\boxed{ク}$ には，次の⓪～④のうちから当てはまるものを一つ選べ.

⓪ 0.63　① 0.73　② 0.83　③ 0.93　④ 1.03

数学 X の得点のデータと数学 Y の得点のデータの共分散は $\boxed{キ}$ であり，数学 Y の得点のデータの標準偏差は 2.04 である（共分散とは数学 X の得点のデータの偏差と数学 Y の得点のデータの偏差の積の平均である）.

数学 X の得点のデータと数学 Y の得点のデータの相関係数に最も近い値は $\boxed{ク}$ である.

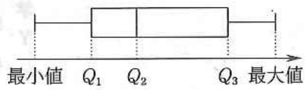
【解説】

(1) ⓪，①，②，③の箱ひげ図について，最小値，第１四分位数，中央値，第３四分位数，最大値は次の表のようになる．

	最小値	第１四分位数	中央値	第３四分位数	最大値
⓪	1	3.5	5	7	8
①	1	3	4.5	7	9
②	2	3.5	4.5	7	9
③	1	3.5	4.5	7	9

四分位数・箱ひげ図

データを値の大きさの順に並べたとき，それらを４等分する区切りの値を四分位数といい，小さい方から順に，第１四分位数，第２四分位数(中央値)，第３四分位数という．また，データの散らばりを，最小値，第１四分位数(Q_1)，中央値(Q_2)，第３四分位数(Q_3)，最大値を用いて図示したものを箱ひげ図という．



12 人の数学 X の得点の最小値は 2 点ではなく，最大値は 8 点ではないから，数学 X の得点のデータの箱ひげ図として正しいものは，①か③である．①，③はともに中央値が 4.5 であることに注目して得点 A の値を考える．

A$\leqq$4 のとき，中央値は，

$$\frac{4+4}{2}=4$$

となり，適さない．

数学 X の得点を値の大きさの順に並べると次のようになる．

A，1，2，3，4，4，4，6，7，7，8，9
1，A，2，3，4，4，4，6，7，7，8，9
1，2，A，3，4，4，4，6，7，7，8，9
1，2，3，A，4，4，4，6，7，7，8，9

A$\geqq$6 のとき，中央値は，

$$\frac{4+6}{2}=5$$

となり，適さない．

数学 X の得点を値の大きさの順に並べると次のようになる．

1，2，3，4，4，4，6，A，7，7，8，9
1，2，3，4，4，4，6，7，7，A，8，9
1，2，3，4，4，4，6，7，7，8，A，9
1，2，3，4，4，4，6，7，7，8，9，A

A＝5 のとき，数学 X の得点を値の大きさの順に並べると，

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 4,\ 4,\ \overset{\substack{\text{A}\\ \parallel}}{5},\ 6,\ 7,\ 7,\ 8,\ 9$$

となり，中央値は，

$$\frac{4+5}{2}=4.5$$

となり，適する．

よって，生徒 7 の数学 X の得点 A の値は $\boxed{\ 5\ }$ である．

このとき，第１四分位数は，

$$\frac{3+4}{2}=3.5$$

であり，第３四分位数は，

$$\frac{7+7}{2}=7$$

である．

したがって，数学 X の得点のデータの箱ひげ図として正しいものは $\boxed{\ ③\ }$ である．

以下，A＝5 とする．

(2) 数学 X の得点を x とし，変量 x の平均値を $\overline{x}$，標準偏差を s_x とすると，

$$\overline{x}=\frac{1+2+3+4+4+4+5+6+7+7+8+9}{12}$$
$$=\frac{60}{12}$$
$$=\boxed{5}\text{（点）}$$

であるから，数学 X の得点の分散 $s_x{}^2$ は，

$$s_x{}^2=\frac{1}{12}\{(1-5)^2+(2-5)^2+(3-5)^2+(4-5)^2+(4-5)^2+(4-5)^2$$
$$+(5-5)^2+(6-5)^2+(7-5)^2+(7-5)^2+(8-5)^2+(9-5)^2\}$$
$$=\frac{66}{12}$$
$$=5.5$$

である．

よって，数学 X の得点の標準偏差 s_x は，

$$s_x=\sqrt{5.5}\fallingdotseq 2.35$$

である．

したがって，標準偏差 s_x に最も近い値は $\boxed{①}$ である．

平均値

変量 x についてのデータの値が，n 個の値 x_1, x_2, …, x_n であるとき，x の平均値 $\overline{x}$ は，

$$\overline{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

偏差・分散・標準偏差

変量 x についてのデータの値を x_1, x_2, …, x_n とし，その平均値を $\overline{x}$ とするとき，

$$x_1-\overline{x},\ x_2-\overline{x},\ \cdots,\ x_n-\overline{x}$$

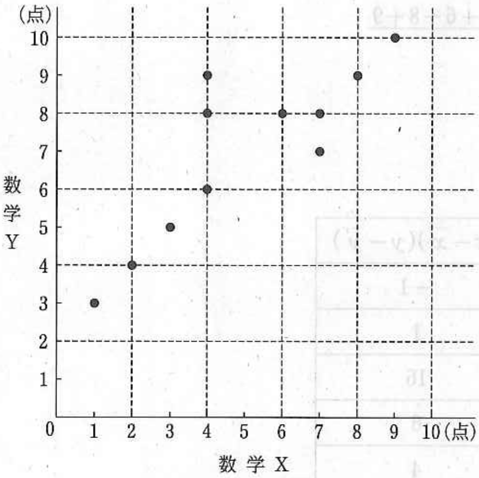
をそれぞれ x_1, x_2, …, x_n の偏差という．さらに，偏差の 2 乗の平均値を x の分散といい，s^2 で表す．つまり，

$$s^2=\frac{1}{n}\{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2\}.$$

また，$\sqrt{s^2}$ を s で表し，データの標準偏差という．

$4<5.5<9$ より，$2<\sqrt{5.5}<3$ であり，
$2.35^2\fallingdotseq 5.52$, $2.75^2\fallingdotseq 7.56$.

(3)



番号	数学 X	数学 Y
生徒 1	4	8
生徒 2	6	8
生徒 3	1	3
生徒 4	8	9
生徒 5	3	5
生徒 6	9	10
生徒 7	5	B
生徒 8	2	4
生徒 9	7	B
生徒 10	4	6
生徒 11	7	8
生徒 12	4	9

生徒７の数学Ｘの得点は５点であるが，散布図には数学Ｘの得点が５点となる点はない．よって，散布図にないデータは生徒７のものとわかるから，生徒７の数学Ｙの得点 **B** を考えればよい．そこで，表より，同じ得点 **B** をとっている生徒９に注目すると，生徒９の数学Ｘの得点は７点である．

散布図より，数学Ｘの得点が７点であるものは，

(数学Ｘの得点，数学Ｙの得点)＝(7, 7)，(7, 8)

の２つであり，さらに表より，

(7, 8) は生徒 11 の得点の組

とわかるから，

(7, 7) が生徒９の得点の組

になる．

よって，得点 **B** の値は７である．

したがって，残り１人の生徒７の得点は，数学Ｘについては $\boxed{5}$ 点であり，数学Ｙについては $\boxed{7}$ 点である．

また，数学Ｙの得点を y とし，変量 y の平均値を $\overline{y}$，標準偏差を s_y とすると，

$$\overline{y}=\frac{8+8+3+9+5+10+7+4+7+6+8+9}{12}$$
$$=\frac{84}{12}$$
$$=7$$

であるから，次の表を得る．

番号	x	y	$x-\overline{x}$	$y-\overline{y}$	$(x-\overline{x})(y-\overline{y})$
生徒 1	4	8	−1	1	−1
生徒 2	6	8	1	1	1
生徒 3	1	3	−4	−4	16
生徒 4	8	9	3	2	6
生徒 5	3	5	−2	−2	4
生徒 6	9	10	4	3	12
生徒 7	5	7	0	0	0
生徒 8	2	4	−3	−3	9
生徒 9	7	7	2	0	0
生徒 10	4	6	−1	−1	1
生徒 11	7	8	2	1	2
生徒 12	4	9	−1	2	−2

変量 x と変量 y の共分散を s_{xy} とすると，

$$s_{xy}=\frac{(-1)+1+16+6+4+12+0+9+0+1+2+(-2)}{12}$$

$$=\frac{48}{12}$$

$$=\boxed{4}$$

であり，問題文から，

$$s_y=2.04$$

である．

よって，数学Ｘの得点のデータと数学Ｙの得点のデータの相関係数は，

$$\frac{4}{2.35\times 2.04}\fallingdotseq 0.83$$

であるから，相関係数に最も近い値は $\boxed{②}$ である．

共分散

2つの変量 x，y に関する n 組のデータ

$(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$，…，$(x_n,\ y_n)$

に対し，x，y の平均値をそれぞれ $\overline{x}$，$\overline{y}$ とするとき，x，y の共分散 s_{xy} は，

$$s_{xy}=\frac{1}{n}\{(x_1-\overline{x})(y_1-\overline{y})+(x_2-\overline{x})(y_2-\overline{y})+\cdots+(x_n-\overline{x})(y_n-\overline{y})\}.$$

相関係数

変量 x と変量 y の標準偏差をそれぞれ s_x，s_y とし，共分散を s_{xy} とするとき，

$$r=\frac{s_{xy}}{s_x\cdot s_y}$$

を x と y の相関係数という．

$s_x=2.35.$

第4問　場合の数・確率

(1)　2枚の硬貨を同時に投げたとき，2枚とも裏が出る確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ であり，少なくとも1枚表が出る確率は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である．

(2)　A，Bの2人がゲームを行う．

三つのマス

がある．また，Aの持ち駒をⓐ，Bの持ち駒をⓑと表す．

次の操作をまとめて1回のプレイとよぶことにする．

ⓐ		ⓑ

上図のようにAはⓐを左端のマス目に置き，Bはⓑを右端のマス目に置く．そして，2枚の硬貨を同時に投げることを2回行い，投げるたびに次のように駒を動かし，点数を得る．

・少なくとも1枚表が出たとき，Aはⓐをいまあるマスの左隣か右隣の空いたマスに移動させる．移動させるマスがない場合はAの負けとなり，Bは1点を得る．

・表が全く出なかったとき，Bはⓑをいまあるマスの左隣か右隣の空いたマスに移動させる．移動させるマスがない場合はBの負けとなり，Aは1点を得る．

最初，A，Bの持ち点はそれぞれ0点であるとし，持ち点は加算されていく．

(i)　2枚の硬貨を同時に投げたとき，少なくとも1枚表が出る事象を E，表が全く出ない事象を F とする．

1回のプレイを行ったとき，Aが1点を得るのは，1回目に E が起こり，2回目に F が起こるときであるから，その確率は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カキ}}}$ である．同様に考えると，Bが1点を得る確率は $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケコ}}}$ であり，さらにA，Bがともに点を得られない確率は $\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ である．

(ii)　2回のプレイを行った後，A，Bの持ち点がともに1点である確率は $\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セソタ}}}$ である．

(iii)　3回のプレイを行った後，Aの持ち点が2点，Bの持ち点が1点である確率は $\dfrac{\boxed{\text{チツ}}}{4096}$ であり，A，Bの持ち点がともに1点である確率は $\dfrac{\boxed{\text{テトナ}}}{\boxed{\text{ニヌネノ}}}$ である．

(iv)　3回のプレイを行った後，Aの持ち点とBの持ち点が等しいという条件の下で，Aの持ち点が1点である条件つき確率は $\dfrac{\boxed{\text{ハヒ}}}{\boxed{\text{フヘ}}}$ である．

【解説】

(1) 2枚の硬貨を区別すると，2枚の硬貨の表と裏の出方は，全部で

(表，表)，(表，裏)，(裏，表)，(裏，裏)

の4通りあり，これらは同様に確からしい．

したがって，2枚とも裏が出る確率は，

$$\frac{\boxed{1}}{\boxed{4}}$$

であり，少なくとも1枚表が出る確率は，

$$\frac{\boxed{3}}{\boxed{4}}$$

である．

☜「少なくとも1枚表が出る」という事象は，「2枚とも裏が出る」の余事象であるから，

$$1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

としてもよい．

(2)(i) 2枚の硬貨を同時に投げたとき，

少なくとも1枚表が出る事象が E，

表が全く出ない事象が F

であるから，E，F が起こる確率は，(1)より，

$$P(E)=\frac{3}{4},$$

$$P(F)=\frac{1}{4}$$

である．

1回のプレイを行ったとき，2つの駒ⓐ，ⓑの移動とA，Bの得点は次のようになる．

(ア) 1回目，2回目ともに E が起こる場合．

ⓐ		ⓑ

↓

	ⓐ	ⓑ

↓

ⓐ		ⓑ

よって，A，Bともに点を得られない．

(イ) 1回目に E が起こり，2回目に F が起こる場合．

ⓐ		ⓑ

↓

	ⓐ	ⓑ

↓

ⓑを移動させるマスがない．

よって，Aは1点を得る．

☜ Bは点を得られない．

(ウ) 1回目に F が起こり，2回目に E が起こる場合．

ⓐ		ⓑ

↓

ⓐ	ⓑ	

↓

ⓐ を移動させるマスがない．

よって，Bは1点を得る．

Aは点を得られない．

(エ) 1回目，2回目ともに F が起こる場合．

ⓐ		ⓑ

↓

ⓐ	ⓑ	

↓

ⓐ		ⓑ

よって，A，Bともに点を得られない．

したがって，Aが1点を得るのは(イ)の場合であり，その確率は，

$$P(E)P(F)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{\boxed{3}}{\boxed{16}}$$

である．

同様に，Bが1点を得るのは(ウ)の場合であり，その確率は，

$$P(F)P(E)=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{\boxed{3}}{\boxed{16}}$$

である．

A，Bがともに点を得られないのは(ア)または(エ)の場合であり，(ア)と(エ)は互いに排反であるから，その確率は，

$$P(E)P(E)+P(F)P(F)=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{\boxed{5}}{\boxed{8}}$$

である．

「AまたはBが1点を得る」の余事象であるから，

$$1-\left(\frac{3}{16}+\frac{3}{16}\right)=\frac{5}{8}$$

としてもよい．

(ii) (i)より，1回のプレイを行うごとに，

$$\begin{cases} \text{Aが1点を得る確率は } \dfrac{3}{16}, \\ \text{Bが1点を得る確率は } \dfrac{3}{16}, \\ \text{A，Bがともに点を得られない確率は } \dfrac{5}{8} \end{cases}$$

である．

　2回のプレイを行った後，A，Bの持ち点がともに1点である確率は，

$$ {}_2C_1 \cdot \frac{3}{16} \cdot \frac{3}{16} = \frac{\boxed{9}}{\boxed{128}} $$

である．

☞　1回のプレイでA，Bが1点を得ることそれぞれをA，Bと表すと，

(A，B)，(B，A)

の ${}_2C_1=2$（通り）の場合がある．

(iii)　3回のプレイを行った後，Aの持ち点が2点，Bの持ち点が1点である確率は，

$$ {}_3C_2\left(\frac{3}{16}\right)^2 \cdot \frac{3}{16} = \frac{\boxed{81}}{4096} $$

であり，A，Bの持ち点がともに1点である確率は，

$$ 3! \cdot \frac{3}{16} \cdot \frac{3}{16} \cdot \frac{5}{8} = \frac{\boxed{135}}{\boxed{1024}} $$

である．

☞　(A，A，B)，(A，B，A)，(B，A，A)

の ${}_3C_2=3$（通り）の場合がある．

☞　1回のプレイでA，Bがともに点を得られないことを0と表すと，

(A，B，0)，(A，0，B)，
(B，A，0)，(B，0，A)，
(0，A，B)，(0，B，A)

の $3!=6$（通り）の場合がある．

(iv)　3回のプレイを行った後，A，Bの持ち点がともに0点である確率は，

$$ \left(\frac{5}{8}\right)^3 = \frac{125}{512} $$

☞　(0，0，0)の1通りしかない．

であり，A，Bの持ち点がともに1点である確率は，(iii)より $\frac{135}{1024}$ である．A，Bの持ち点がともに2点以上になることはないから，Aの持ち点とBの持ち点が等しくなる確率は，

$$ \frac{125}{512} + \frac{135}{1024} = \frac{385}{1024} $$

である．

　したがって，3回のプレイを行った後，Aの持ち点とBの持ち点が等しいという条件の下でAの持ち点が1点である条件つき確率は，

$$ \frac{\frac{135}{1024}}{\frac{385}{1024}} = \frac{135}{385} $$

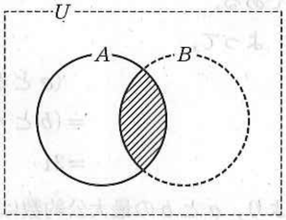
$$ = \frac{\boxed{27}}{\boxed{77}} $$

である．

条件つき確率

　事象 A が起こるという条件の下で，事象 B が起こる条件つき確率 $P_A(B)$ は，「A に対する $A \cap B$ の割合」であり，

$$ P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}. $$



☞　A，Bの持ち点が等しい確率は $\frac{385}{1024}$，A，Bの持ち点がともに1点である確率は $\frac{135}{1024}$．

第５問　整数の性質

(1)　$a=2015$, $b=496$ とする．a を b で割ったときの商を q_1，余りを r_1 とすると

$q_1=$ $\boxed{\text{ア}}$，　$r_1=$ $\boxed{\text{イウ}}$

である．さらに，b を r_1 で割ったときの商を q_2，余りを r_2 とすると

$q_2=$ $\boxed{\text{エオ}}$，　$r_2=$ $\boxed{\text{カ}}$

であるから，a と b の最大公約数は $\boxed{\text{キク}}$ である．

(2)　2015 で割ると 5 余り，496 で割ると 36 余る自然数 N について考えよう．

N を 2015，496 で割ったときの商をそれぞれ x，y とすると

$\boxed{\text{ケコ}}x-\boxed{\text{サシ}}y=1$　…………①

が成り立ち，① を満たす x，y の組のうち，x の値が一番小さいものは

$(x,\ y)=(\boxed{\text{ス}},\ \boxed{\text{セ}})$

であり，x の値が小さい方から三番目のものは

$(x,\ y)=(\boxed{\text{ソタ}},\ \boxed{\text{チツテ}})$

である．

また，不等式 $N<10^6$ を満たす自然数 N は全部で $\boxed{\text{トナ}}$ 個あり，このうち，21 と互いに素であるものは $\boxed{\text{ニヌ}}$ 個ある．

【解説】

(1)　$a=2015$，$b=496$ であり，

$$2015=496\times4+31$$

より，a を b で割ったときの商 q_1，余り r_1 は，

$q_1=\boxed{4}$，　$r_1=\boxed{31}$

である．さらに，

$$496=31\times16$$

より，b を r_1 で割ったときの商 q_2，余り r_2 は，

$q_2=\boxed{16}$，　$r_2=\boxed{0}$

である．

よって，

$(a$ と b の最大公約数$)$

$=(b$ と r_1 の最大公約数$)$

$=31$

より，a と b の最大公約数は $\boxed{31}$ である．

整数 m と正の整数 n に対して，

$$\begin{cases} m=nq+r, \\ 0\leqq r<n \end{cases}$$

を満たす整数 q と整数 r はただ１通りに定まる．

q は m を n で割ったときの商，

r は m を n で割ったときの余り

という．

２つの自然数 m，n について，m を n で割ったときの余りを r とすると，

$\begin{pmatrix} m\text{ と }n\text{ の} \\ \text{最大公約数} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n\text{ と }r\text{ の} \\ \text{最大公約数} \end{pmatrix}$.

このことを利用して，最大公約数を求める方法をユークリッドの互除法という．

$a=2015=5\times13\times31$,

$b=496=2^4\times31$

であることからも，a と b の最大公約数は 31 であるとわかる．

(2)　2015 で割ると 5 余り，496 で割ると 36 余るような自然数 N は，N を 2015，496 で割ったときの商がそれぞれ x，y より，

$$N=2015x+5=496y+36\quad (x,\ y\text{ は整数})$$

と表すことができる.

このとき,

$$2015x-496y=31$$

すなわち,

$$\boxed{65}\,x-\boxed{16}\,y=1 \qquad \cdots ①$$

となる.

ここで, 65 を 16 で割ると,

$$65=16\times4+1$$

であるから,

$$65\times1-16\times4=1 \qquad \cdots ②$$

と変形できる.

①−② より,

$$65(x-1)-16(y-4)=0$$

となるから,

$$65(x-1)=16(y-4) \qquad \cdots ③$$

である.

65 と 16 は互いに素であるから, $x-1$ は 16 の倍数である.

したがって,

$$x-1=16k \quad (k\text{ は整数})$$

と表すことができ, ③ に代入すると,

$$65\cdot16k=16(y-4)$$

すなわち,

$$y-4=65k$$

である.

よって, ① の整数解は,

$$x=16k+1,\quad y=65k+4 \quad (k\text{ は整数}) \qquad \cdots ④$$

と表すことができる.

N が自然数のとき, 商 x, y は 0 以上の整数となるから, k は 0 以上の整数である.

x の値が一番小さいものは, $k=0$ のときであり, ④ に代入して,

$$(x,\ y)=(\boxed{1},\ \boxed{4})$$

である.

x の値が小さい方から三番目のものは, $k=2$ のときであり, ④ に代入して,

$$(x,\ y)=(\boxed{33},\ \boxed{134})$$

である.

また, $N=2015x+5$ に, $x=16k+1$ を代入すると,

$$\begin{aligned}N&=2015(16k+1)+5\\&=32240k+2020\end{aligned} \qquad \cdots ⑤$$

☜ 割り算を利用して ① を満たす x, y の値をさがす.

☜ p, q は互いに素な整数とする.
x, y が整数のとき,
$$px=qy$$
ならば,
$$\begin{cases}x=qk,\\ y=pk\end{cases} \quad (k\text{ は整数})$$
と表すことができる.

☜ $N=496y+36$ に $y=65k+4$ を代入して ⑤ を導いてもよい.

である．

$N<10^6$ のとき，

$$32240k+2020<10^6$$
$$k<\frac{997980}{32240}$$
$$k<\frac{49899}{1612}\left(=30+\frac{1539}{1612}\right)$$

となるから，これを満たす0以上の整数 k の個数は，

$$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 30 \qquad \cdots⑥$$

の31個である．

⑤より，異なる k の値に対して異なる N が定まるから，$N<10^6$ を満たす自然数 N は $\boxed{31}$ 個ある．

ここで，⑤より，

$$\begin{aligned}N&=(32241-1)k+(2019+1)\\&=(32241k+2019)-k+1\\&=3(10747k+673)-k+1\end{aligned}$$

32240 と 2020 に最も近い3の倍数はそれぞれ 32241 と 2019 である．

である．

これより，N が3の倍数となるのは，$-k+1$ が3の倍数のときであり，⑥のうち，$-k+1$ が3の倍数になるような k の個数は，

$$k=1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13,\ \underline{16},\ 19,\ 22,\ 25,\ 28$$

の10個である．

また，⑤より，

$$\begin{aligned}N&=(32242-2)k+(2023-3)\\&=(32242k+2023)-2k-3\\&=7(4606k+289)-2k-3\end{aligned}$$

32240 と 2020 に最も近い7の倍数は，それぞれ 32242 と 2023 である．

である．

これより，N が7の倍数となるのは，$-2k-3$ が7の倍数のときであり，⑥のうち，$-2k-3$ が7の倍数になるような k の個数は，

$$k=2,\ 9,\ \underline{16},\ 23,\ 30$$

の5個である．

$k=16$ のとき，N が3の倍数かつ7の倍数であることに注意すると，3の倍数または7の倍数となるような N は，

$$10+5-1=14\ (\text{個})$$

である．

よって，3の倍数でもなく7の倍数でもない，つまり，21と互いに素である自然数 N の個数は，

$$31-14=\boxed{17}\ (\text{個})$$

ある．

$0\leqq k\leqq 30$ を満たす整数 k に対して，集合 A，B を，

$A=\{k\,|\,N$ が3の倍数となる$\}$，

$B=\{k\,|\,N$ が7の倍数となる$\}$

と定めると，

$n(A)=10$，$n(B)=5$，$n(A\cap B)=1$

であるから，

$$\begin{aligned}n(A\cup B)&=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\\&=10+5-1\\&=14.\end{aligned}$$

21と互いに素である N の個数は $n(\overline{A\cup B})$ であるから，

$$\begin{aligned}n(\overline{A\cup B})&=31-n(A\cup B)\\&=31-14\\&=17.\end{aligned}$$

第6問　図形の性質

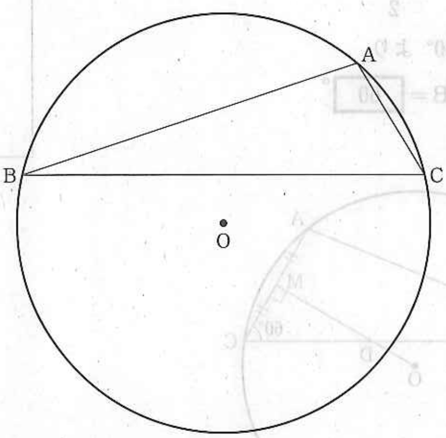
$\triangle$ABC において AB＝7，BC＝8，CA＝3 とする．

余弦定理を用いると，$\angle$ACB＝$\boxed{アイ}$° であり，辺 CA の中点 M と $\triangle$ABC の外心 O を通る直線と辺 BC の交点を D とするとき

$\angle$CMD＝$\boxed{ウエ}$°，　CD＝$\boxed{オ}$

である．

参考図



点 A と $\triangle$ABC の内心を通る直線と辺 BC の交点を E とする．

このとき，BE : EC＝$\boxed{カ}$: $\boxed{キ}$ であるから，DE＝$\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ である．

また，直線 AE と直線 MD の交点を F とし，$\triangle$CDM と直線 AE にメネラウスの定理を用いると

MF : FD＝$\boxed{コ}$: 1

である．

さらに

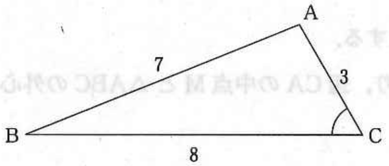
$$OD=\frac{\boxed{サ}\sqrt{\boxed{シ}}}{\boxed{ス}}$$

であるから，$\triangle$OBD と $\triangle$CFM の面積比は

$\boxed{セソ}$: $\boxed{タ}$

である．

【解説】



△ABC に余弦定理を用いると,

$$\cos\angle\mathrm{ACB}=\frac{8^2+3^2-7^2}{2\cdot8\cdot3}$$

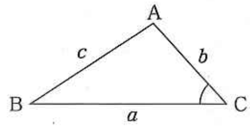
$$=\frac{1}{2}$$

であるから, $0°<\angle\mathrm{ACB}<180°$ より,

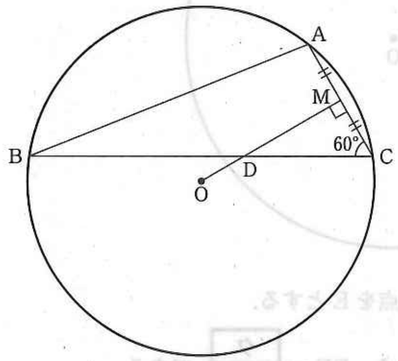
$$\angle\mathrm{ACB}=\boxed{60}°$$

である.

余弦定理



$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$



円の中心と弦の中点を結んでできる線分は弦と垂直であるから,

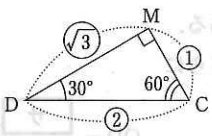
$$\angle\mathrm{CMD}=\boxed{90}°$$

である.

三角形 CDM において, $\angle\mathrm{DCM}=60°$, $\angle\mathrm{CMD}=90°$ より,

$$\mathrm{CD}:\mathrm{CM}=2:1$$

であるから,

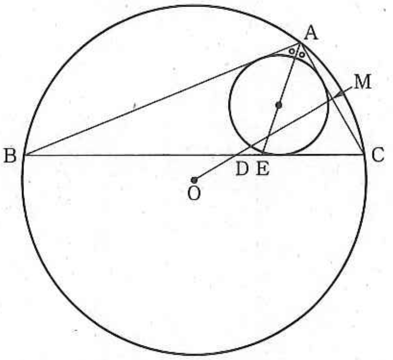


$$\mathrm{CD}=2\mathrm{CM}$$

$$=\mathrm{CA}$$

$$=\boxed{3}$$

である.

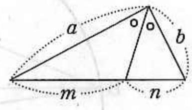


直線 AE は ∠BAC の二等分線であるから，

$$BE:EC=AB:AC$$
$$=\boxed{7}:\boxed{3}$$

である．

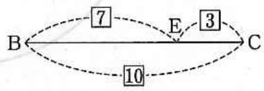
角の二等分線の定理



$m:n=a:b$.

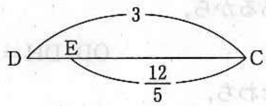
よって，

$$EC=\frac{3}{7+3}BC$$
$$=\frac{3}{10}\cdot 8$$
$$=\frac{12}{5}$$

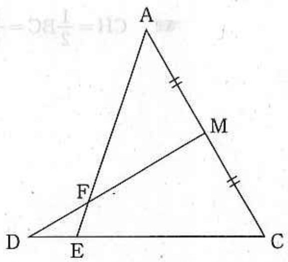


であり，

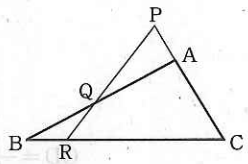
$$DE=CD-CE$$
$$=3-\frac{12}{5}$$
$$=\frac{\boxed{3}}{\boxed{5}}$$



である．



メネラウスの定理



三角形 ABC の辺 CA，AB，BC またはその延長が三角形の頂点を通らない一つの直線とそれぞれ点 P，Q，R で交わるとき，

$$\frac{AQ}{QB}\cdot\frac{BR}{RC}\cdot\frac{CP}{PA}=1.$$

△CDM と直線 AE にメネラウスの定理を用いると，

$$\frac{MF}{FD}\cdot\frac{DE}{EC}\cdot\frac{CA}{AM}=1$$

$$\frac{MF}{FD}\cdot\frac{\frac{3}{5}}{\frac{12}{5}}\cdot\frac{2}{1}=1$$

$DE=\frac{3}{5}$，$EC=\frac{12}{5}$．また，M は辺 AC の中点であるから，$\frac{CA}{AM}=\frac{2}{1}$．

$$\frac{MF}{FD}\cdot\frac{1}{4}\cdot 2=1$$

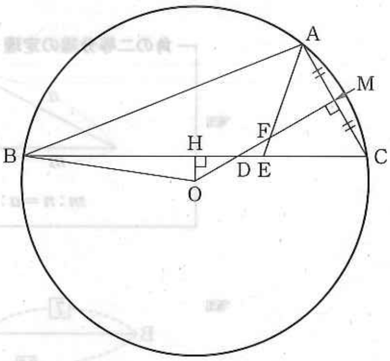
$$\frac{MF}{FD}=2$$

である．

したがって，

$$MF:FD=\boxed{2}:1$$

である．



点 O から直線 BC に下ろした垂線と直線 BC の交点を H とすると，H は線分 BC の中点である．

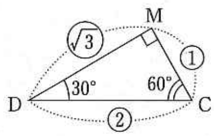
$$\triangle ODH \backsim \triangle CDM$$

☞ $\angle ODH=\angle CDM$ かつ $\angle OHD=\angle CMD$.

であるから，

$$OD:DH=CD:DM=2:\sqrt{3}$$

☞



すなわち，

$$OD=\frac{2}{\sqrt{3}}DH$$

であり，

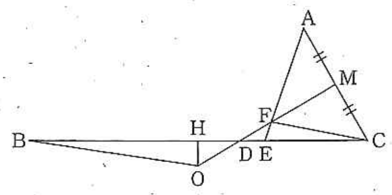
$$\begin{aligned}DH&=CH-CD\\&=4-3\\&=1\end{aligned}$$

☞ $CH=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\cdot 8=4,\quad CD=3.$

より，

$$\begin{aligned}OD&=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot 1\\&=\frac{\boxed{2}\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{3}}\end{aligned}$$

である．



△ODH の面積を S とし，△OBD と △CFM の面積をそれぞれ S_1，S_2 とすると，

$$S_1=\frac{BD}{DH}S$$
$$=\frac{5}{1}S$$
$$=5S \quad \cdots ①$$

☞ BD＝BC－CD＝8－3＝5,
DH＝1.

であり，

$$S_2=\frac{MF}{MD}(\triangle CDM\text{ の面積})$$
$$=\frac{2}{3}(\triangle CDM\text{ の面積}) \quad \cdots ②$$

☞ MF : FD＝2 : 1.

である．

ここで，△ODH∽△CDM であり，$OD=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，CD＝3 であるから，

$$(\triangle CDM\text{ の面積})=\left(\frac{CD}{OD}\right)^2(\triangle ODH\text{ の面積})$$
$$=\left(\frac{3}{\frac{2\sqrt{3}}{3}}\right)^2 S$$
$$=\frac{27}{4}S \quad \cdots ③$$

☞ 2つの相似な図形において，相似比が，
$a:b$
ならば，面積比は，
$a^2:b^2$
である．

である．

②，③ より，

$$S_2=\frac{2}{3}\cdot\frac{27}{4}S$$
$$=\frac{9}{2}S$$

である．

これと ① より，△OBD と △CFM の面積比は，

$$S_1:S_2=5S:\frac{9}{2}S$$
$$=\boxed{10}:\boxed{9}$$

である．