2015年度 第1回 全統マーク模試

数学Ⅱ・数学B

問　題	選　択　方　法
第1問	必　答
第2問	必　答
第3問	いずれか2問を選択し，解答しなさい。
第4問	
第5問	

 （注）この科目には，選択問題があります。（15ページ参照。）

第1問 （必答問題） （配点 30）

〔1〕 座標平面において，x 軸上に点A，y 軸上に点Bを，直線ABの方程式が $\dfrac{x}{8}+\dfrac{y}{4}=1$ となるようにとる。

点Aの座標は $\left(\boxed{\text{ア}},\ 0\right)$，点Bの座標は $\left(0,\ \boxed{\text{イ}}\right)$ である。

線分ABの中点の座標は $\left(\boxed{\text{ウ}},\ \boxed{\text{エ}}\right)$ であるから，線分ABを直径とする円 K の方程式は

$$\left(x-\boxed{\text{ウ}}\right)^2+\left(y-\boxed{\text{エ}}\right)^2=\boxed{\text{オカ}}$$

である。

（数学Ⅱ・数学B 第1問 は次ページに続く。）

直線ABに垂直な直線をℓとすると，ℓの傾きは $\boxed{\text{キ}}$ であるから，ℓの方程式は $y=\boxed{\text{キ}}\,x+s$ と表される。ただし，sは実数である。

直線ℓと円Kが2交点P，Qをもつようなsの値の範囲は

$$\boxed{\text{クケコ}}<s<\boxed{\text{サ}}$$

である。また，$s=-1$ のとき，線分PQの長さは $\boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{スセ}}}$ である。

（数学Ⅱ・数学B 第1問 は次ページに続く。）

［2］ $f(x)=3^{2x}-3^{x}$ とする。

(1) $f(0)=\boxed{\text{ソ}}$，$f(-1)=\dfrac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ である。

また，$t=3^{x}$ とおくと，$f(x)$ は t を用いて

$$f(x)=t^{\boxed{\text{テ}}}-t$$

と表される。

(2) x の不等式 $f(x)\geqq 0$ の解は

$$x\geqq\boxed{\text{ト}}$$

である。

（数学Ⅱ・数学B 第1問 は次ページに続く。）

(3) k を実数とする。x の方程式 $f(x)-5\cdot 3^x=k$ の実数解の個数が 2 となるような k の値の範囲は

$$\boxed{\text{ナニ}}<k<\boxed{\text{ヌ}}$$

である。このとき，二つの実数解の和が $3\log_3 2$ となるのは

$$k=\boxed{\text{ネノ}}$$

のときである。

第2問 (必答問題) (配点 30)

p, q を実数とし，$f(x)=x^3-3(p+1)x^2+12px+q$ とする。

(1) 関数 $f(x)$ の導関数は

$$f'(x)=\boxed{\text{ア}}\left\{x^2-\left(\boxed{\text{イ}}p+\boxed{\text{ウ}}\right)x+\boxed{\text{エ}}p\right\}$$

であり，$f(x)$ が極値をもつ条件は $p\neq\boxed{\text{オ}}$ である。

$f(x)$ が $x=0$ で極大値をとるものとすると，$p=\boxed{\text{カ}}$ である。さらに，極大値が 6 であるとすると $q=\boxed{\text{キ}}$ であり，$f(x)$ は $x=\boxed{\text{ク}}$ で極小値 $\boxed{\text{ケ}}$ をとる。このとき，$-1\leqq x\leqq 4$ における $f(x)$ の最大値は $\boxed{\text{コサ}}$，最小値は $\boxed{\text{シ}}$ である。

以下，$p=\boxed{\text{カ}}$，$q=\boxed{\text{キ}}$ とする。

(数学Ⅱ・数学B 第2問 は次ページに続く。)

(2) a, b を実数とし，放物線 $y = -x^2 + ax + b$ を C とする。

点 $\mathrm{A}(1,\ f(1))$ における曲線 $y = f(x)$ の接線 ℓ の方程式は

$$y = \boxed{\text{スセ}}\,x + \boxed{\text{ソ}}$$

であり，放物線 C が点 A を通り，A における C の接線が ℓ に一致するとき

$$a = \boxed{\text{タチ}},\quad b = \boxed{\text{ツ}}$$

である。

このとき，放物線 C と直線 ℓ および y 軸で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ であり，放物線 C と直線 ℓ および x 軸の $x > 0$ の部分で囲まれた図形の面積は

$\dfrac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ である。

第3問 （選択問題） （配点 20）

数列 $\{a_n\}$ は等差数列であり，$a_1=11$，$a_3=3$ を満たすとする。$\{a_n\}$ の公差は $\boxed{\text{アイ}}$ であり，一般項は

$$a_n=\boxed{\text{ウエ}}\,n+\boxed{\text{オカ}}$$

である。また，$\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$S_n=\boxed{\text{キク}}\,n^2+\boxed{\text{ケコ}}\,n$$

である。

(1) $$\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}=\frac{\boxed{\text{サシ}}}{a_k a_{k+1}} \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が成り立つから

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k a_{k+1}}=-\frac{n}{\boxed{\text{スセ}}\left(\boxed{\text{ソ}}\,n-\boxed{\text{タチ}}\right)} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である。

（数学Ⅱ・数学B 第3問 は次ページに続く。）

(2) 数列 $\{b_n\}$ は $b_1=15$ であり，$\{b_n\}$ の階差数列が $\{a_n\}$ であるとする。このとき

$$b_n = b_1 + S_{\boxed{ツ}} \quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

が成り立つ。$\boxed{\text{ツ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。

⓪ $n-2$　　① $n-1$　　② n　　③ $n+1$　　④ $n+2$

したがって，$\{b_n\}$ の一般項は

$$b_n = \boxed{テト}\,n^2 + \boxed{ナニ}\,n$$

である。$\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和を T_n とする。$b_n>0$ を満たす最大の自然数 n は $\boxed{\text{ヌ}}$ であり，T_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ の最大値は

$$T_{\boxed{ネ}} = \boxed{ノハヒ}$$

である。

第4問　（選択問題）（配点　20）

三角形OABにおいて，辺OAを4:5に内分する点をCとすると

$$\overrightarrow{OC}=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\overrightarrow{OA}$$

であり，辺ABを3:2に内分する点をDとすると

$$\overrightarrow{OD}=\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\overrightarrow{OA}+\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\overrightarrow{OB}$$

である。

直線BCと直線ODの交点をEとする。

点Eが直線BC上にあることから，実数sを用いて $\overrightarrow{BE}=s\overrightarrow{BC}$ と表されるので

$$\overrightarrow{OE}=\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}s\overrightarrow{OA}+\left(\boxed{\text{ケ}}-s\right)\overrightarrow{OB}$$

となる。さらに，点Eが直線OD上にあることから，実数tを用いて $\overrightarrow{OE}=t\overrightarrow{OD}$ と表されるので

$$\overrightarrow{OE}=\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}t\overrightarrow{OA}+\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}t\overrightarrow{OB}$$

となる。これらから

$$s=\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}},\quad t=\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$$

である。

（数学Ⅱ・数学B 第4問 は次ページに続く。）

直線OD上の点Pを $\overrightarrow{BP} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{OA}$ となるようにとると

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

である。

$OA = 3$，$OB = 10$，$\cos\angle AOB = \dfrac{1}{5}$ とする。

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \boxed{タ}$ であり，三角形OABの面積は

$$\boxed{チ}\sqrt{\boxed{ツ}}$$

である。

また，三角形OBD，三角形ADC，三角形APDのうち面積が最も小さい三角形は $\boxed{テ}$ であり，$\boxed{テ}$ の面積は $\boxed{ト}\sqrt{\boxed{ナ}}$ である。$\boxed{テ}$ に当てはまるものを，次の⓪～②のうちから一つ選べ。

⓪ 三角形OBD　　① 三角形ADC　　② 三角形APD

第5問（選択問題）（配点　20）

袋Aの中に1と記されたカード，2と記されたカード，3と記されたカードが1枚ずつ，全部で3枚のカードが入っている。また，袋Bの中に0と記されたカード，2と記されたカードが1枚ずつ，全部で2枚のカードが入っている。

A，Bそれぞれの袋からカードを1枚ずつ取り出し，Aから取り出したカードに記された数をノートの1枚目に，Bから取り出したカードに記された数をノートの2枚目に記録し，それら二つの数の和と積をそれぞれノートの3枚目と4枚目に記録し，カードをそれぞれもとの袋に戻す。

この操作をGとする。

(1)　操作Gを1回行ったとき，ノートの1枚目に記録される数をXとし，2枚目に記録される数をYとする。

確率変数Xの期待値(平均)は$\boxed{\text{ア}}$であり，分散は$\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$である。

確率変数Yの期待値(平均)は$\boxed{\text{エ}}$であり，分散は$\boxed{\text{オ}}$である。

（数学Ⅱ・数学B 第5問 は次ページに続く。）

(2) 操作Gを1回行ったとき，ノートの3枚目に記録される数をSとし，4枚目に記録される数をTとする。

確率変数Sの期待値(平均)は $\boxed{\text{カ}}$ であり，分散は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である。

確率変数Tの期待値(平均)は $\boxed{\text{ケ}}$ であり，分散は $\dfrac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ である。

(3) 操作Gを6回行う。このとき，ノートの3枚目に3が記録される回数をWとする。

$P(W=1)=\dfrac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソタチ}}}$ である。また，確率変数Wの期待値(平均)は $\boxed{\text{ツ}}$ であり，分散は $\dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ である。