2015年度 第1回 全統マーク模試

数学Ⅱ・数学B

【解答・採点基準】 (100点満点)

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第1問	ア	8	2	
	イ	4	2	
	(ウ, エ)	(4, 2)	2	
	オカ	20	2	
	キ	2	2	
	クケコ $< s <$ サ	$-16 < s < 4$	2	
	シ$\sqrt{スセ}$	$2\sqrt{15}$	3	
	ソ	0	2	
	$\frac{タチ}{ツ}$	$\frac{-2}{9}$	2	
	テ	2	2	
	ト	0	2	
	ナニ	−9	2	
	ヌ	0	2	
	ネノ	−8	3	
第1問 自己採点小計			(30)	

問題番号	解答記号	正解	配点	自己採点
第2問	ア, イ, ウ, エ	3, 2, 2, 4	2	
	オ	1	2	
	カ	0	2	
	キ	6	2	
	ク	2	2	
	ケ	2	2	
	コサ	22	2	
	シ	2	2	
	スセ	−3	2	
	ソ	7	1	
	タチ	−1	2	
	ツ	6	2	
	$\frac{テ}{ト}$	$\frac{1}{3}$	3	
	$\frac{ナ}{ニ}$	$\frac{1}{2}$	4	
第2問 自己採点小計			(30)	
第3問	アイ	−4	2	
	ウエ, オカ	−4, 15	2	
	キク, ケコ	−2, 13	2	
	サシ	−4	2	
	スセ, ソ, タチ	11, 4, 11	2	
	ツ	1	2	
	テト, ナニ	−2, 17	2	
	ヌ	8	2	
	ネ	8	2	
	ノハヒ	204	2	
第3問 自己採点小計			(20)	

数学Ⅱ・数学B

問題番号	解答記号	正　解	配点	自己採点
第4問	$\frac{ア}{イ}$	$\frac{4}{9}$	2	
	$\frac{ウ}{エ}$, $\frac{オ}{カ}$	$\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$	2	
	$\frac{キ}{ク}$, ケ	$\frac{4}{9}$, 1	2	
	$\frac{コ}{サ}$	$\frac{3}{5}$	2	
	$\frac{シ}{ス}$	$\frac{2}{3}$	2	
	$\frac{セ}{ソ}$	$\frac{2}{3}$	2	
	タ	6	2	
	チ$\sqrt{ツ}$	$6\sqrt{6}$	2	
	テ	1	2	
	ト$\sqrt{ナ}$	$2\sqrt{6}$	2	
	第4問　自己採点小計		(20)	
第5問	ア	2	2	
	$\frac{イ}{ウ}$	$\frac{2}{3}$	2	
	エ	1	1	
	オ	1	1	
	カ	3	2	
	$\frac{キ}{ク}$	$\frac{5}{3}$	2	
	ケ	2	2	
	$\frac{コサ}{シ}$	$\frac{16}{3}$	2	
	$\frac{スセ}{ソタチ}$	$\frac{64}{243}$	2	
	ツ	2	2	
	$\frac{テ}{ト}$	$\frac{4}{3}$	2	
	第5問　自己採点小計		(20)	
		自己採点合計	(100)	

第1問　図形と方程式，指数関数・対数関数

〔1〕 座標平面において，x 軸上に点A，y 軸上に点Bを，直線ABの方程式が $\frac{x}{8}+\frac{y}{4}=1$ となるようにとる．

点Aの座標は $\left(\boxed{\text{ア}},\ 0\right)$，点Bの座標は $\left(0,\ \boxed{\text{イ}}\right)$ である．

線分ABの中点の座標は $\left(\boxed{\text{ウ}},\ \boxed{\text{エ}}\right)$ であるから，線分ABを直径とする円 K の方程式は

$$\left(x-\boxed{\text{ウ}}\right)^2+\left(y-\boxed{\text{エ}}\right)^2=\boxed{\text{オカ}}$$

である．

直線ABに垂直な直線を ℓ とすると，ℓ の傾きは $\boxed{\text{キ}}$ であるから，ℓ の方程式は

$y=\boxed{\text{キ}}x+s$ と表される．ただし，s は実数である．

直線 ℓ と円 K が2交点P，Qをもつような s の値の範囲は

$$\boxed{\text{クケコ}}<s<\boxed{\text{サ}}$$

である．また，$s=-1$ のとき，線分PQの長さは $\boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{スセ}}}$ である．

〔2〕 $f(x)=3^{2x}-3^x$ とする．

(1) $f(0)=\boxed{\text{ソ}}$，$f(-1)=\dfrac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ である．

また，$t=3^x$ とおくと，$f(x)$ は t を用いて

$$f(x)=t^{\boxed{\text{テ}}}-t$$

と表される．

(2) x の不等式 $f(x)\geqq 0$ の解は

$$x\geqq\boxed{\text{ト}}$$

である．

(3) k を実数とする．x の方程式 $f(x)-5\cdot 3^x=k$ の実数解の個数が2となるような k の値の範囲は

$$\boxed{\text{ナニ}}<k<\boxed{\text{ヌ}}$$

である．このとき，二つの実数解の和が $3\log_3 2$ となるのは

$$k=\boxed{\text{ネノ}}$$

のときである．

【解説】

〔1〕

直線ABの方程式 $\frac{x}{8}+\frac{y}{4}=1$ において，$y=0$ とすると

$$\frac{x}{8}=1$$

より

$$x=8$$

となるから，点Aの座標は $(\boxed{8}, 0)$ である．また，$x=0$ とすると

$$\frac{y}{4}=1$$

より

$$y=4$$

となるから，点Bの座標は $(0, \boxed{4})$ である．

線分ABの中点Mの座標は

$$\left(\frac{8+0}{2}, \frac{0+4}{2}\right)=(\boxed{4}, \boxed{2})$$

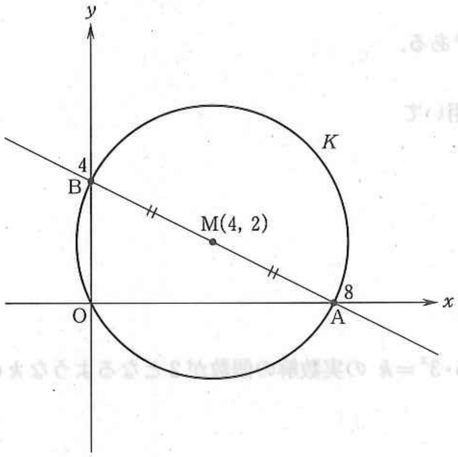
であり，Mが線分ABを直径とする円 K の中心である．また，K の半径は

$$\mathrm{MA}=\sqrt{(8-4)^2+(0-2)^2}=2\sqrt{5}$$

である．よって，K の方程式は

$$(x-4)^2+(y-2)^2=\boxed{20}$$

である．



直線ABの方程式を変形すると $y=-\frac{1}{2}x+4$ となるので，直線ABの傾きは $-\frac{1}{2}$ である．したがって，直線ABに垂直な直線 ℓ の傾きは $\boxed{2}$ であり，ℓ の方程式は $y=2x+s$ すなわち，$2x-y+s=0$ と表される．ただし，s は実数である．

円 K の中心Mと直線 ℓ の距離を d とすると

$$d=\frac{|2\cdot4-2+s|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|6+s|}{\sqrt{5}}$$

であるから，直線 ℓ と円 K が2交点P，Qをもつような s の値の範囲は

中点

2点 (x_1, y_1)，(x_2, y_2) を結ぶ線分の中点の座標は

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right).$$

2点間の距離

2点 (x_1, y_1)，(x_2, y_2) の間の距離は

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

円の方程式

点 (a, b) を中心とする半径 r の円の方程式は

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

垂直条件

傾き m の直線と傾き m' の直線が直交するための条件は

$$mm'=-1.$$

点と直線の距離

点 (x_0, y_0) と直線 $ax+by+c=0$ の距離は

$$\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

$$d < 2\sqrt{5}$$

より

$$\frac{|6+s|}{\sqrt{5}} < 2\sqrt{5}$$

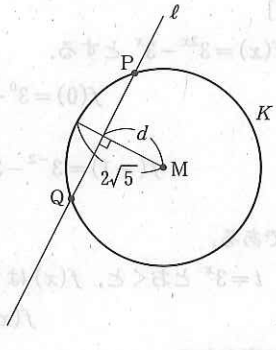
$$|6+s| < 10$$

$$-10 < 6+s < 10$$

すなわち

$$\boxed{-16} < s < \boxed{4}$$

である．



$s=-1$ のとき

$$d = \frac{|6-1|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

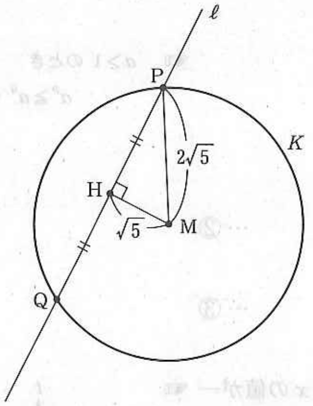
である．つまり，M から ℓ へ下した垂線の足を H とすると MH$=\sqrt{5}$ である．また，H は線分 PQ の中点である．下図の三角形 PMH に三平方の定理を用いることにより

$$\mathrm{PH} = \sqrt{\mathrm{PM}^2 - \mathrm{MH}^2} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - (\sqrt{5})^2} = \sqrt{15}$$

となるから

$$\mathrm{PQ} = 2\mathrm{PH} = \boxed{2}\sqrt{\boxed{15}}$$

である．



【 クケコ ， サ の別解】

直線 ℓ は直線 AB に垂直であるから，ℓ が線分 AB を直径とする円 K と接するのは，ℓ が点 A または点 B を通るときであり，このとき

$$0 = 2\cdot 8 + s \quad \text{または} \quad 4 = 2\cdot 0 + s$$

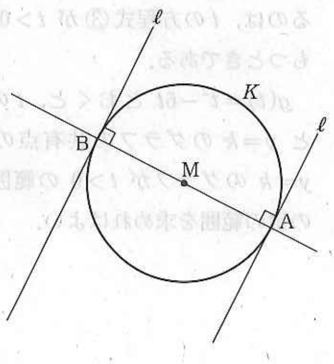
すなわち

$$s = -16 \quad \text{または} \quad s = 4$$

である．よって，直線 ℓ と円 K が 2 交点 P，Q をもつような s の値の範囲は

$$-16 < s < 4$$

である．



〔2〕

$f(x)=3^{2x}-3^x$ とする.

(1) $$f(0)=3^0-3^0=\boxed{0},$$ ☜ $3^0=1.$

$$f(-1)=3^{-2}-3^{-1}=\frac{1}{9}-\frac{1}{3}=\frac{\boxed{-2}}{\boxed{9}}$$ ☜ $3^{-2}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}.$

である.

$t=3^x$ とおくと, $f(x)$ は t を用いて

$$f(x)=t^{\boxed{2}}-t \qquad \cdots ①$$ ☜ $3^{2x}=(3^x)^2=t^2.$

と表される.

(2) ①より, x の不等式 $f(x)\geqq 0$ は

$$t^2-t\geqq 0$$

と表される. これを変形して

$$t(t-1)\geqq 0.$$

$t>0$ に注意してこれを解くと

$$t\geqq 1$$ ☜ $t=3^x>0.$

である. したがって

$$3^x\geqq 3^0$$

であり, 底の3は1より大きいので, x の不等式 $f(x)\geqq 0$ の解は

$$x\geqq\boxed{0}$$ ☜ $a>1$ のとき $a^p\geqq a^q \iff p\geqq q.$

である.

(3) x の方程式

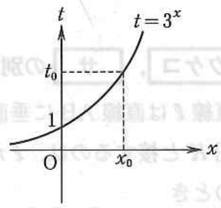
$$f(x)-5\cdot 3^x=k \qquad \cdots ②$$

は, $t=3^x$ とおくと

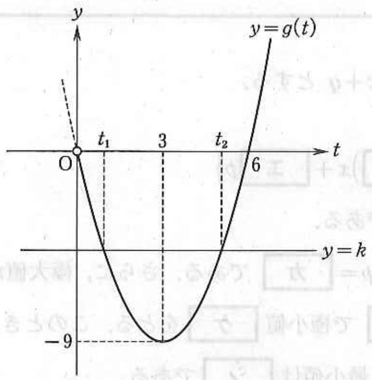
$$t^2-6t=k \qquad \cdots ③$$

と表される.

正の実数 t の値一つに対して $t=3^x$ を満たす実数 x の値が一つ定まる. したがって, x の方程式②の実数解の個数が2となるのは, t の方程式③が $t>0$ の範囲に異なる二つの実数解をもつときである. ☜



$g(t)=t^2-6t$ とおくと, t の方程式③の実数解は $y=g(t)$ と $y=k$ のグラフの共有点の t 座標であるから, $y=g(t)$ と $y=k$ のグラフが $t>0$ の範囲で2個の共有点をもつような k の値の範囲を求めればよい.



$$g(t)=(t-3)^2-9$$

であるから，グラフより

$$\boxed{-9}<k<\boxed{0} \cdots ④$$

である．

このとき，② の二つの実数解を α, β とし，$t_1=3^{\alpha}$, $t_2=3^{\beta}$ とおくと，t_1, t_2 は t の 2 次方程式 ③ の二つの解である．

$\alpha+\beta=3\log_3 2$ となるとき

$$\alpha+\beta=\log_3 8$$

より

$$3^{\alpha+\beta}=8$$

である．したがって

$$t_1t_2=3^{\alpha}3^{\beta}=3^{\alpha+\beta}=8$$

である．

ここで，③，すなわち $t^2-6t-k=0$ に解と係数の関係を用いると

$$t_1t_2=-k$$

であるから

$$8=-k$$

が成り立つ．つまり

$$k=-8$$

であり，これは確かに ④ を満たす．

よって，② の二つの実数解の和が $3\log_3 2$ となるのは

$k=\boxed{-8}$ のときである．

$a>0$, $a\neq1$, $M>0$, p が実数のとき

$$p\log_a M=\log_a M^p.$$

対数

$a>0$, $a\neq1$, $M>0$ のとき

$$a^x=M \iff x=\log_a M.$$

$a>0$ のとき

$$a^xa^y=a^{x+y}.$$

解と係数の関係

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の二つの解を α, β とすると

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}.$$

第2問　微分法・積分法

p，q を実数とし，$f(x)=x^3-3(p+1)x^2+12px+q$ とする．

(1) 関数 $f(x)$ の導関数は

$$f'(x)=\boxed{ア}\{x^2-(\boxed{イ}p+\boxed{ウ})x+\boxed{エ}p\}$$

であり，$f(x)$ が極値をもつ条件は $p\neq\boxed{オ}$ である．

$f(x)$ が $x=0$ で極大値をとるものとすると，$p=\boxed{カ}$ である．さらに，極大値が 6 であるとすると $q=\boxed{キ}$ であり，$f(x)$ は $x=\boxed{ク}$ で極小値 $\boxed{ケ}$ をとる．このとき，$-1\leqq x\leqq 4$ における $f(x)$ の最大値は $\boxed{コサ}$，最小値は $\boxed{シ}$ である．

以下，$p=\boxed{カ}$，$q=\boxed{キ}$ とする．

(2) a，b を実数とし，放物線 $y=-x^2+ax+b$ を C とする．

点 $\mathrm{A}(1,\ f(1))$ における曲線 $y=f(x)$ の接線 ℓ の方程式は

$$y=\boxed{スセ}x+\boxed{ソ}$$

であり，放物線 C が点 A を通り，A における C の接線が ℓ に一致するとき

$$a=\boxed{タチ},\quad b=\boxed{ツ}$$

である．

このとき，放物線 C と直線 ℓ および y 軸で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}$ であり，放物線 C と直線 ℓ および x 軸の $x>0$ の部分で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{ナ}}{\boxed{ニ}}$ である．

【解説】

$$f(x)=x^3-3(p+1)x^2+12px+q.$$

(1) $f(x)$ の導関数は

$$\begin{aligned}f'(x)&=3x^2-6(p+1)x+12p\\&=\boxed{3}\{x^2-(\boxed{2}p+\boxed{2})x+\boxed{4}p\}\\&=3(x-2p)(x-2)\end{aligned}$$

であり，$f'(x)=0$ となる x の値は

$$x=2p,\ 2$$

である．よって，$f(x)$ が極値をもつ条件は

$$2p\neq 2$$

すなわち $p\neq\boxed{1}$ である．

$f(x)$ が $x=0$ で極大値をとるとき，$f'(0)=0$ より

$$p=0$$

が必要である．このとき

$$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$$

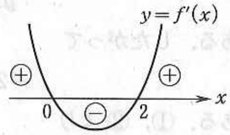
> **導関数**
> $(x^n)'=nx^{n-1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$，
> $(c)'=0$ （c は定数）．

> $f'(x)$ が $x=\alpha$ の前後で符号を変えるとき，$f(x)$ は $x=\alpha$ で極値をもつ．

となることより，$f(x)$ の増減は次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	(極大)	↘	(極小)	↗

☜ $f'(x)$ の符号は，$y=f'(x)$ のグラフで確認するとよい．



増減表より，$f(x)$ は確かに $x=0$ で極大となる．よって

$$p=\boxed{0}$$

である．さらに，極大値が 6 であることより

$$f(0)=q=\boxed{6}$$

となる．したがって

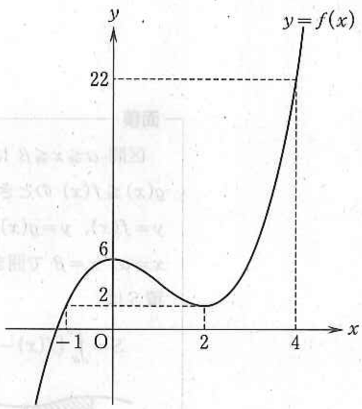
$$f(x)=x^3-3x^2+6$$

であり，$f(x)$ は

$$x=\boxed{2} \text{ で，極小値 } f(2)=\boxed{2}$$

をとる．

このとき，$y=f(x)$ のグラフは次のようになる．



グラフより，$-1 \leqq x \leqq 4$ における $f(x)$ の最大値は $\boxed{22}$，最小値は $\boxed{2}$ である．

(2) $f(1)=4$, $f'(1)=-3$ より，点 A(1, 4) における曲線 $y=f(x)$ の接線 ℓ の方程式は

☜ $f(x)=x^3-3x^2+6$,
$f'(x)=3x^2-6x$.

$$y=-3(x-1)+4$$

すなわち

$$y=\boxed{-3}x+\boxed{7}$$

である．

☜ **接線の方程式**
点 $(t,\ f(t))$ における曲線 $y=f(x)$ の接線の傾きは $f'(t)$ であり，接線の方程式は
$$y=f'(t)(x-t)+f(t).$$

放物線 C: $y=-x^2+ax+b$ が点 A を通るとき

$$4=-1^2+a\cdot 1+b$$

より

$$a+b=5 \qquad \cdots ①$$

である．

A における C の接線が ℓ に一致するとき，A における C の接線の傾きが ℓ の傾きと一致する．

$g(x)=-x^2+ax+b$ とすると，$g'(x)=-2x+a$ であり，A における C の接線の傾きは

$$g'(1)=-2+a$$

である．したがって

$$-2+a=-3 \qquad \cdots②$$

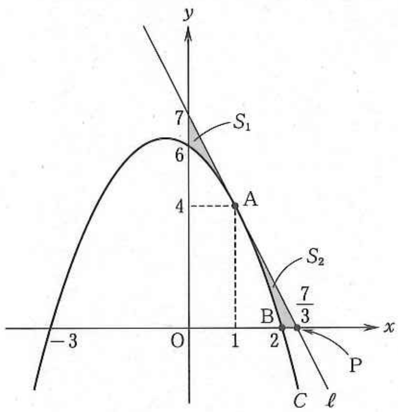
である．①，②より

$$a=\boxed{-1},\quad b=\boxed{6}$$

が得られる．よって，$C: y=-x^2-x+6$ であり，C と x 軸の正の部分との交点は B$(2,\ 0)$ である．また，ℓ と x 軸の交点は P$\left(\frac{7}{3},\ 0\right)$ である．

☜ $C: y=-(x-2)(x+3)$.

放物線 C と直線 ℓ および y 軸で囲まれた図形の面積を S_1，放物線 C と直線 ℓ および x 軸の $x>0$ の部分で囲まれた図形の面積を S_2 とすると，S_1 と S_2 は下図の網掛け部分の面積である．



よって

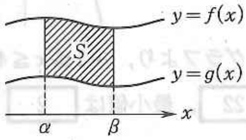
$$\begin{aligned}
S_1&=\int_0^1\{(-3x+7)-(-x^2-x+6)\}\,dx\\
&=\int_0^1(x^2-2x+1)\,dx\\
&=\int_0^1(x-1)^2\,dx\\
&=\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_0^1\\
&=\frac{\boxed{1}}{\boxed{3}}
\end{aligned}$$

であり

☜ **面積**

区間 $\alpha\leqq x\leqq\beta$ においてつねに $g(x)\leqq f(x)$ のとき，2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ および直線 $x=\alpha$，$x=\beta$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S=\int_\alpha^\beta\{f(x)-g(x)\}\,dx.$$



☜ $\int(x+a)^2\,dx=\frac{1}{3}(x+a)^3+C.$

（C は積分定数）

$$S_2=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{7}{3}-1\right)\cdot 4-\int_1^2(-x^2-x+6)\,dx$$

$$=\frac{8}{3}-\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+6x\right]_1^2$$

$$=\frac{8}{3}-\left\{-\frac{1}{3}(2^3-1^3)-\frac{1}{2}(2^2-1^2)+6(2-1)\right\}$$

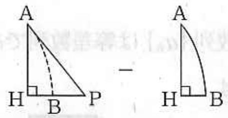
$$=\frac{8}{3}-\left(-\frac{7}{3}-\frac{3}{2}+6\right)$$

$$=\frac{8}{3}-\frac{13}{6}$$

$$=\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$$

である．

S_2を



と求めた．ただし，H(1, 0) である．

$$\int x^n\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C.$$

($n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$．C は積分定数)

【$\frac{\boxed{ナ}}{\boxed{ニ}}$ の別解】

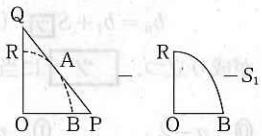
$$S_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{3}\cdot 7-\int_0^2(-x^2-x+6)\,dx-\frac{1}{3}$$

$$=\frac{47}{6}-\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+6x\right]_0^2$$

$$=\frac{47}{6}-\left(-\frac{8}{3}-2+12\right)$$

$$=\frac{1}{2}.$$

S_2を



と求めた．ただし，Q(0, 7)，R(0, 6) である．

第3問　数　列

数列 $\{a_n\}$ は等差数列であり，$a_1=11$，$a_3=3$ を満たすとする．$\{a_n\}$ の公差は $\boxed{\text{アイ}}$ であり，一般項は

$$a_n=\boxed{\text{ウエ}}n+\boxed{\text{オカ}}$$

である．また，$\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$S_n=\boxed{\text{キク}}n^2+\boxed{\text{ケコ}}n$$

である．

(1)　$$\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}=\frac{\boxed{\text{サシ}}}{a_ka_{k+1}}\quad(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が成り立つから

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_ka_{k+1}}=-\frac{n}{\boxed{\text{スセ}}\left(\boxed{\text{ソ}}n-\boxed{\text{タチ}}\right)}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である．

(2)　数列 $\{b_n\}$ は $b_1=15$ であり，$\{b_n\}$ の階差数列が $\{a_n\}$ であるとする．このとき

$$b_n=b_1+S_{\boxed{\text{ツ}}}\quad(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

が成り立つ．$\boxed{\text{ツ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ．

⓪ $n-2$　　① $n-1$　　② n　　③ $n+1$　　④ $n+2$

したがって，$\{b_n\}$ の一般項は

$$b_n=\boxed{\text{テト}}n^2+\boxed{\text{ナニ}}n$$

である．$\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和を T_n とする．$b_n>0$ を満たす最大の自然数 n は $\boxed{\text{ヌ}}$ であり，T_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ の最大値は

$$T_{\boxed{\text{ネ}}}=\boxed{\text{ノハヒ}}$$

である．

【解説】

等差数列 $\{a_n\}$ の公差を d とすると

$$a_3=a_1+2d.$$

$a_1=11$，$a_3=3$ であるから

$$3=11+2d$$

より

$$d=-4.$$

よって，$\{a_n\}$ の公差は $\boxed{-4}$ であり，一般項は

$$\begin{aligned}a_n&=a_1+(n-1)d\\&=11+(n-1)\cdot(-4)\\&=\boxed{-4}n+\boxed{15}.\end{aligned}$$

また，$\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n は

> **等差数列の一般項**
> 公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は
> $$a_n=a_1+(n-1)d.$$

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$
$$= \frac{n\{11 + (-4n + 15)\}}{2}$$
$$= n(-2n + 13)$$
$$= \boxed{-2}n^2 + \boxed{13}n.$$

等差数列の和

初項 a，末項 ℓ，項数 n の等差数列の和は

$$\frac{n(a+\ell)}{2}.$$

(1)
$$\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} = \frac{a_{k+1} - a_k}{a_k a_{k+1}}$$
$$= \frac{\boxed{-4}}{a_k a_{k+1}} \quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

☜ $a_{k+1} - a_k = d = -4.$

が成り立つから

$$\frac{1}{a_k a_{k+1}} = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right) \quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

であり

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = -\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right)$$
$$= -\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right) + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)\right\}$$
$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$$
$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{11} + \frac{1}{4n - 11}\right)$$
$$= -\frac{1}{4} \cdot \frac{(4n - 11) + 11}{11(4n - 11)}$$
$$= -\frac{n}{\boxed{11}\left(\boxed{4}n - \boxed{11}\right)}.$$
$$(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

☜ $a_{n+1} = -4(n+1) + 15$
$= -4n + 11.$

(2) 数列 $\{b_n\}$ の階差数列が $\{a_n\}$ であるから，$n \geqq 2$ のとき

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k$$
$$= b_1 + S_{n-1}$$

☜ $b_1,\quad b_2,\quad b_3,\quad \cdots\quad b_{n-1},\quad b_n$
$+a_1\quad +a_2\quad \cdots\quad +a_{n-1}$

が成り立つ．よって，$\boxed{\text{ツ}}$ には $\boxed{⓪}$ が当てはまる．

したがって，$\{b_n\}$ の一般項は，$n \geqq 2$ のとき

$$b_n = 15 + \{-2(n-1)^2 + 13(n-1)\}$$
$$= \boxed{-2}n^2 + \boxed{17}n.$$

これは $n = 1$ のときも成り立つ．

☜ $b_1 = 15.$
$S_n = -2n^2 + 13n$ より
$S_{n-1} = -2(n-1)^2 + 13(n-1).$

$\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和を T_n とする．

$b_n>0$ となる n は

$$-2n^2+17n>0$$

より

$$-2n+17>0$$

$$n<\frac{17}{2}\ (=8.5)$$

☜ $n>0$.

を満たす．したがって，$b_n>0$ を満たす最大の自然数 n は

$\boxed{8}$ であり

$$n\geqq 2 \text{ のとき } T_n-T_{n-1}=b_n$$

☜ $\begin{cases} T_n=b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}+b_n, \\ T_{n-1}=b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}. \end{cases}$

が成り立つから

$$\begin{cases} 2\leqq n\leqq 8 \quad \text{ならば} \quad T_{n-1}<T_n \\ 9\leqq n \qquad\ \ \text{ならば} \quad T_{n-1}>T_n \end{cases}$$

☜ $2\leqq n\leqq 8$ のとき $b_n>0$ だから $T_n-T_{n-1}>0$ すなわち $T_{n-1}<T_n$.
また，$9\leqq n$ のとき $b_n<0$ だから $T_n-T_{n-1}<0$ すなわち $T_{n-1}>T_n$.

となる．よって

$$T_1<T_2<\cdots<T_7<T_8>T_9>T_{10}>\cdots$$

であり，T_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ の最大値は

$$\begin{aligned} T_{\boxed{8}} &= \sum_{k=1}^{8} b_k \\ &= \sum_{k=1}^{8}(-2k^2+17k) \\ &= -2\sum_{k=1}^{8}k^2+17\sum_{k=1}^{8}k \\ &= -2\cdot\frac{8\cdot 9\cdot 17}{6}+17\cdot\frac{8\cdot 9}{2} \\ &= 8\cdot 9\cdot 17\cdot\left(-\frac{2}{6}+\frac{1}{2}\right) \\ &= \boxed{204} \end{aligned}$$

☜ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$.

である．

第4問　ベクトル

三角形OABにおいて，辺OAを4:5に内分する点をCとすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

であり，辺ABを3:2に内分する点をDとすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

である．

直線BCと直線ODの交点をEとする．

点Eが直線BC上にあることから，実数sを用いて $\overrightarrow{\mathrm{BE}}=s\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ と表されるので

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\left(\boxed{\text{ケ}}-s\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

となる．さらに，点Eが直線OD上にあることから，実数tを用いて $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=t\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ と表されるので

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}t\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

となる．これらから

$$s=\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}},\quad t=\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$$

である．

直線OD上の点Pを $\overrightarrow{\mathrm{BP}}\mathbin{/\!/}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となるようにとると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

である．

$\mathrm{OA}=3$，$\mathrm{OB}=10$，$\cos\angle\mathrm{AOB}=\frac{1}{5}$ とする．

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\boxed{\text{タ}}$ であり，三角形OABの面積は

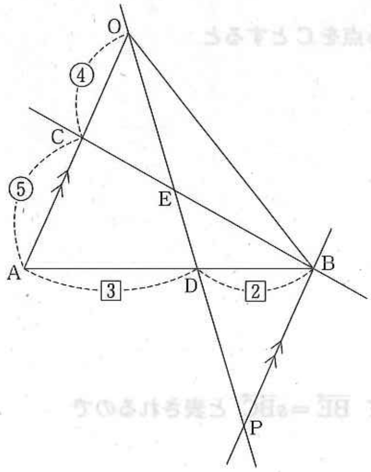
$$\boxed{\text{チ}}\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}$$

である．

また，三角形OBD，三角形ADC，三角形APDのうち面積が最も小さい三角形は $\boxed{\text{テ}}$ であり，$\boxed{\text{テ}}$ の面積は $\boxed{\text{ト}}\sqrt{\boxed{\text{ナ}}}$ である．$\boxed{\text{テ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～②のうちから一つ選べ．

⓪ 三角形OBD　　① 三角形ADC　　② 三角形APD

【解説】



辺 OA を 4:5 に内分する点が C なので

$$\overrightarrow{OC}=\frac{\boxed{4}}{\boxed{9}}\overrightarrow{OA}$$

であり，辺 AB を 3:2 に内分する点が D なので

$$\overrightarrow{OD}=\frac{2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}}{3+2}$$

$$=\frac{\boxed{2}}{\boxed{5}}\overrightarrow{OA}+\frac{\boxed{3}}{\boxed{5}}\overrightarrow{OB}$$

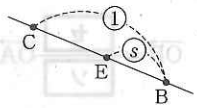
である.

内分点

線分 AB を $m:n$ に内分する点を P とすると

$$\overrightarrow{OP}=\frac{n\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}}{m+n}.$$

点 E が直線 BC 上にあることから，実数 s を用いて $\overrightarrow{BE}=s\overrightarrow{BC}$ と表されるので



$$\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OB}=s(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$$

より

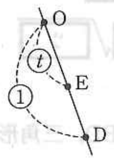
$$\overrightarrow{OE}=(1-s)\overrightarrow{OB}+s\overrightarrow{OC}$$

$$=\frac{\boxed{4}}{\boxed{9}}s\overrightarrow{OA}+\left(\boxed{1}-s\right)\overrightarrow{OB} \quad \cdots ①$$

$\overrightarrow{OC}=\frac{4}{9}\overrightarrow{OA}.$

となる.

さらに，点 E が直線 OD 上にあることから，実数 t を用いて $\overrightarrow{OE}=t\overrightarrow{OD}$ と表されるので



$$\overrightarrow{OE}=\frac{2}{5}t\overrightarrow{OA}+\frac{3}{5}t\overrightarrow{OB} \quad \cdots ②$$

$\overrightarrow{OD}=\frac{2}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{5}\overrightarrow{OB}.$

となる.

$\overrightarrow{OA}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{OB}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{OA}\not\parallel\overrightarrow{OB}$ であるから，①，②より

$$\begin{cases}\frac{4}{9}s=\frac{2}{5}t,\\ 1-s=\frac{3}{5}t\end{cases}$$

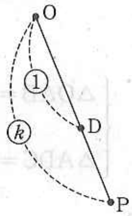
α，β，α'，β' が実数であり，$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ のとき

$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=\alpha'\vec{a}+\beta'\vec{b}$

$\Longleftrightarrow$ $\alpha=\alpha'$ かつ $\beta=\beta'$.

が成り立ち，これより，$s=\dfrac{\boxed{3}}{\boxed{5}}$，$t=\dfrac{\boxed{2}}{\boxed{3}}$ である．

点Pが直線OD上にあることから，実数 k を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ と表されるので



$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{2}{5}k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{3}{5}k\overrightarrow{\mathrm{OB}} \qquad \cdots ③$$

と表される．

このとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\&=\frac{2}{5}k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\left(\frac{3}{5}k-1\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}} \qquad \cdots (*)\end{aligned}$$

である．

$\overrightarrow{\mathrm{BP}}\,/\!/\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となるとき，$\frac{3}{5}k-1=0$ が成り立ち，$k=\frac{5}{3}$ を得る．

$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\ell\overrightarrow{\mathrm{OA}}$（$\ell$ は実数）と(*)から $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の係数を比べた．

これを③に代入して

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{\boxed{2}}{\boxed{3}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

となる．

$\overrightarrow{\mathrm{BP}}\,/\!/\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ より

$$\mathrm{OA}:\mathrm{BP}=\mathrm{AD}:\mathrm{DB}=3:2.$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ であり

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}\\&=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\end{aligned}$$

と求めてもよい．

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=3$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=10$，$\cos\angle\mathrm{AOB}=\frac{1}{5}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=3\times10\times\frac{1}{5}=\boxed{6}$$

であり

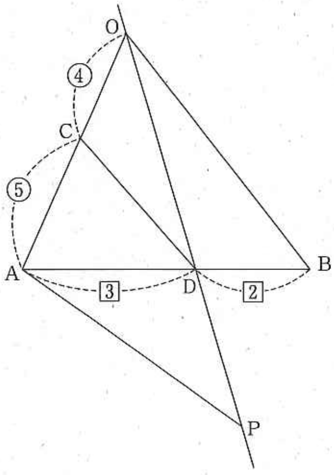
$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{OAB}&=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{3^2\times10^2-6^2}\\&=\boxed{6}\sqrt{\boxed{6}}\end{aligned}$$

である．

内積の定義

$\vec{0}$ でない二つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ ($0°\leqq\theta\leqq180°$) とすると，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ は

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta.$$



$\triangle$OAB の面積を S とおくと

$$\triangle \mathrm{OBD}=\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{AB}}\times S=\frac{2}{5}S. \qquad \cdots ④$$

三角形 OAB と三角形 OBD の底辺をそれぞれ AB，BD とすると，高さは等しいので $\triangle \mathrm{OAB}:\triangle \mathrm{OBD}=\mathrm{AB}:\mathrm{BD}$.

また

$$\begin{cases} \triangle \mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\times \mathrm{AO}\times \mathrm{AB}\times \sin\angle \mathrm{OAB}, \\ \triangle \mathrm{ADC}=\dfrac{1}{2}\times \mathrm{AC}\times \mathrm{AD}\times \sin\angle \mathrm{OAB} \end{cases}$$

であるから

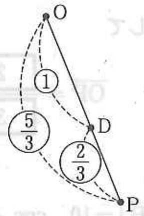
$$\begin{aligned} \triangle \mathrm{ADC}&=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AO}}\times\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AB}}\times\triangle \mathrm{OAB} \\ &=\frac{5}{9}\times\frac{3}{5}S \\ &=\frac{1}{3}S. \qquad \cdots ⑤ \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \triangle \mathrm{ADC}&=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{OA}}\triangle \mathrm{OAD} \\ &=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{OA}}\times\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AB}}\triangle \mathrm{OAB} \\ &=\frac{5}{9}\times\frac{3}{5}\times S \\ &=\frac{1}{3}S \end{aligned} \right.$$

としてもよい．

$k=\dfrac{5}{3}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{5}{3}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ である．よって

$$\mathrm{OD}:\mathrm{DP}=1:\left(\frac{5}{3}-1\right)=3:2$$



であることより

$$\begin{aligned} \triangle \mathrm{APD}&=\frac{\mathrm{DP}}{\mathrm{OD}}\triangle \mathrm{OAD} \\ &=\frac{\mathrm{DP}}{\mathrm{OD}}\times\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AB}}\triangle \mathrm{OAB} \\ &=\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}S \\ &=\frac{2}{5}S. \qquad \cdots ⑥ \end{aligned}$$

④，⑤，⑥ より，三角形 OBD，三角形 ADC，三角形 APD のうち，面積が最も小さい三角形は，三角形 ADC である．したがって，$\boxed{テ}$ に当てはまるものは，$\boxed{⓪}$ である．また，三角形 ADC の面積は

$$\frac{1}{3}\times 6\sqrt{6}=\boxed{2}\sqrt{\boxed{6}}$$

である．

第5問　確率分布と統計的な推測

袋Aの中に1と記されたカード，2と記されたカード，3と記されたカードが1枚ずつ，全部で3枚のカードが入っている．また，袋Bの中に0と記されたカード，2と記されたカードが1枚ずつ，全部で2枚のカードが入っている．

A，Bそれぞれの袋からカードを1枚ずつ取り出し，Aから取り出したカードに記された数をノートの1枚目に，Bから取り出したカードに記された数をノートの2枚目に記録し，それら二つの数の和と積をそれぞれノートの3枚目と4枚目に記録し，カードをそれぞれもとの袋に戻す．

この操作をGとする．

(1)　操作Gを1回行ったとき，ノートの1枚目に記録される数を X とし，2枚目に記録される数を Y とする．

確率変数 X の期待値(平均)は $\boxed{ア}$ であり，分散は $\dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}$ である．

確率変数 Y の期待値(平均)は $\boxed{エ}$ であり，分散は $\boxed{オ}$ である．

(2)　操作Gを1回行ったとき，ノートの3枚目に記録される数を S とし，4枚目に記録される数を T とする．

確率変数 S の期待値(平均)は $\boxed{カ}$ であり，分散は $\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$ である．

確率変数 T の期待値(平均)は $\boxed{ケ}$ であり，分散は $\dfrac{\boxed{コサ}}{\boxed{シ}}$ である．

(3)　操作Gを6回行う．このとき，ノートの3枚目に3が記録される回数を W とする．

$P(W=1)=\dfrac{\boxed{スセ}}{\boxed{ソタチ}}$ である．また，確率変数 W の期待値(平均)は $\boxed{ツ}$ であり，分散は $\dfrac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}$ である．

【解説】

(1)　確率変数 X のとり得る値は1，2，3である．各値について，X がその値をとる確率を求めると

$$P(X=1)=\frac{1}{3},$$
$$P(X=2)=\frac{1}{3},$$
$$P(X=3)=\frac{1}{3}$$

である．よって，X の確率分布は下の表のようになる．

X	1	2	3	計
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

ゆえに，X の期待値(平均)は

$$E(X)=1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\frac{1}{3}$$

$$=\boxed{2}$$

である．また，X の分散は

$$V(X)=(1-2)^2\cdot\frac{1}{3}+(2-2)^2\cdot\frac{1}{3}+(3-2)^2\cdot\frac{1}{3}$$

$$=\frac{\boxed{2}}{\boxed{3}}$$

である．

> **期待値(平均)，分散**
>
> 確率変数 X のとり得る値を
>
> $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$
>
> とし，X がこれらの値をとる確率をそれぞれ
>
> $p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n$
>
> とすると，X の期待値(平均) $E(X)$ は
>
> $$E(X)=\sum_{k=1}^{n}x_kp_k$$
>
> であり，X の分散 $V(X)$ は，$E(X)=m$ として
>
> $$V(X)=\sum_{k=1}^{n}(x_k-m)^2p_k \quad \cdots ①$$
>
> または
>
> $$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2. \quad \cdots ②$$

ここでは①を用いた．

確率変数 Y のとり得る値は 0，2 である．各値について，Y がその値をとる確率を求めると

$$P(Y=0)=\frac{1}{2},$$

$$P(Y=2)=\frac{1}{2}$$

である．よって，Y の確率分布は下の表のようになる．

Y	0	2	計
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

ゆえに，Y の期待値(平均)は

$$E(Y)=0\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\boxed{1}$$

である．また，Y の分散は

$$V(Y)=(0-1)^2\cdot\frac{1}{2}+(2-1)^2\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\boxed{1}$$

である．

(2) $S=X+Y$ であるから

$$\begin{aligned}E(S)&=E(X+Y)\\&=E(X)+E(Y)\\&=2+1\\&=\boxed{3}\end{aligned}$$

である．

> 二つの確率変数 X，Y に対して
>
> $$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$
>
> が成り立つ．

X と Y は互いに独立であるから

$$\begin{aligned}V(S)&=V(X+Y)\\&=V(X)+V(Y)\\&=\frac{2}{3}+1\end{aligned}$$

> 二つの確率変数 X，Y が互いに独立であるとき
>
> $$V(X+Y)=V(X)+V(Y)$$
>
> が成り立つ．

$$=\frac{\boxed{5}}{\boxed{3}}$$

である．

また，$T=XY$ であり，X と Y は互いに独立であるから

$$\begin{aligned}E(T)&=E(XY)\\&=E(X)E(Y)\\&=2\cdot 1\\&=\boxed{2}\end{aligned}$$

である．

二つの確率変数 X，Y が互いに独立であるとき

$$E(XY)=E(X)E(Y)$$

が成り立つ．

ここで，T の確率分布は下の表のようになる．

T	0	2	4	6	計
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$T\,(=XY)$ の値は下の表のようになる．

Y \ X	1	2	3
0	0	0	0
2	2	4	6

ゆえに，T の分散は

$$V(T)=(0-2)^2\cdot\frac{1}{2}+(2-2)^2\cdot\frac{1}{6}+(4-2)^2\cdot\frac{1}{6}+(6-2)^2\cdot\frac{1}{6}$$

$$=\frac{\boxed{16}}{\boxed{3}}$$

である．

【$\boxed{ケ}$ の別解】

T の確率分布表より

$$\begin{aligned}E(T)&=0\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}\\&=2\end{aligned}$$

である．

(3)　操作Gを1回行って，ノートの3枚目に3が記録されるのは，「ノートの1枚目に3，かつ2枚目に0」または「ノートの1枚目に1，かつ2枚目に2」が記録される場合であり，その確率は

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

である．

$S=3$ となる確率である．

$S\,(=X+Y)$ の値は下の表のようになる．

Y \ X	1	2	3
0	1	2	3
2	3	4	5

確率変数 W は二項分布 $B\left(6,\ \frac{1}{3}\right)$ に従うから

$$P(W=1)={}_6C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{\boxed{64}}{\boxed{243}}$$

である．また，W の期待値(平均)は

$$E(W)=6\cdot\frac{1}{3}$$

$$=\boxed{2}$$

であり，W の分散は

$$V(W)=6\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}$$

$$=\frac{\boxed{4}}{\boxed{3}}$$

である．

二項分布

n を自然数とする．

確率変数 X のとり得る値が

$0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n$

であり，X の確率分布が

$$P(X=r)={}_nC_r\,p^r(1-p)^{n-r}\quad (r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

であるとき，X の確率分布を二項分布といい，$B(n,\ p)$ で表す．

確率変数 X が二項分布 $B(n,\ p)$ に従うとき，$q=1-p$ として，X の期待値(平均) $E(X)$ と分散 $V(X)$ は

$$E(X)=np,$$

$$V(X)=npq$$

である．