【数　　学】

【Ⅰ型受験者用】

1　小問集合

【Ⅰ型共通　必須問題】

（配点　60点）

(1)　$x=\sqrt{5}+1$，$y=\sqrt{5}-1$ のとき，次の式の値を求めよ．

(i)　$x+y$

(ii)　xy

(iii)　$\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}$

(2)　k を実数の定数とする．x の方程式

$$x^2-|x-k|=0 \qquad \cdots(*)$$

について考える．

(i)　$(*)$が $x=0$ を解にもつとき，k の値を求めよ．

(ii)　$(*)$が $x=1$ を解にもつとき，k の値を求めよ．

(iii)　$k=0$ のとき，$(*)$を解け．

(3)　三角形 ABC において，

$$\mathrm{AB}=5,\ \ \mathrm{BC}=6,\ \ \cos B=\frac{1}{5}$$

が成り立っている．

(i)　辺 CA の長さを求めよ．

(ii)　三角形 ABC の面積を求めよ．

(iii)　三角形 ABC の内接円の半径を求めよ．

(4)　次のデータは，10 人の生徒に 5 点満点のテストを行ったときの得点を小さい順に並べたものである．

0，1，1，2，3，4，4，5，5，5

(i)　得点の平均値を求めよ．

(ii)　得点の中央値を求めよ．

(iii)　得点の分散を求めよ．

【配点】

(1)　15 点．

(i)　5 点．(ii)　5 点．(iii)　5 点．

(2)　15 点．

(i)　5 点．(ii)　5 点．(iii)　5 点．

(3)　15 点．

(i)　5 点．(ii)　5 点．(iii)　5 点．

(4)　15 点．

(i)　5 点．(ii)　5 点．(iii)　5 点．

【出題のねらい】

(1)　無理数の四則演算を正しく実行できるかをみる問題である．

(2)　絶対値記号を含む方程式を解くことができるかをみる問題である．

(3)　三角比に関するいくつかの公式を正しく用いられるかをみる問題である．

(4)　「データの分析」に現れる用語を正しく理解しているかをみる問題である．

【解答】

(1)(i)

$$x+y=(\sqrt{5}+1)+(\sqrt{5}-1)$$
$$=\mathbf{2\sqrt{5}}.$$

(ii)

$$xy=(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)$$
$$=(\sqrt{5})^2-1^2$$
$$=\mathbf{4}.$$

(iii)

$$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=\frac{x^2+y^2}{xy}$$
$$=\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}$$
$$=\frac{(2\sqrt{5})^2-2\cdot 4}{4}$$
$$=\mathbf{3}.$$

(2)

$$x^2-|x-k|=0. \qquad \cdots(*)$$

(i)　$(*)$が $x=0$ を解にもつとき，

$$0^2-|0-k|=0.$$
$$|k|=0.$$
$$\mathbf{k=0}.$$

(ii)　$(*)$が $x=1$ を解にもつとき，

$$1^2-|1-k|=0.$$
$$|k-1|=1.$$
$$k-1=\pm 1.$$
$$\mathbf{k=0,\ 2}.$$

(iii)　$k=0$ のとき，$(*)$は

$$x^2-|x|=0. \qquad \cdots①$$

(ア)　$x\geqq 0$ のとき．

①は

$$x^2-x=0.$$

これを解くと，

$$x(x-1)=0.$$
$$x=0,\ 1.$$

これらは $x\geqq 0$ を満たす．

(イ)　$x<0$ のとき．

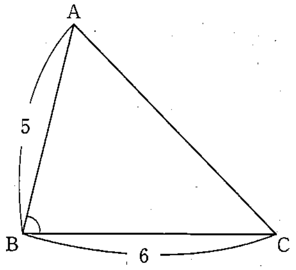
①は

$$x^2+x=0.$$

これを解くと，

$$x(x+1)=0.$$
$$x=0,\ -1.$$
このうち，$x<0$ を満たすのは
$$x=-1.$$
(ア)，(イ)より，
$$x=\mathbf{0,\ 1,\ -1.}$$

(3)



(i) 三角形 ABC に余弦定理を用いると，
$$\begin{aligned}CA^2&=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos B\\&=5^2+6^2-2\cdot5\cdot6\cdot\frac{1}{5}\\&=25+36-12\\&=49.\end{aligned}$$
よって，
$$CA=\mathbf{7}.$$

(ii) $\cos B=\dfrac{1}{5}$ より，
$$\begin{aligned}\sin B&=\sqrt{1-\cos^2 B}\\&=\sqrt{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2}\\&=\frac{2\sqrt{6}}{5}.\end{aligned}$$
よって，
$$\begin{aligned}\triangle ABC&=\frac{1}{2}AB\cdot BC\sin B\\&=\frac{1}{2}\cdot5\cdot6\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5}\\&=\mathbf{6\sqrt{6}}.\end{aligned}$$

(iii) 三角形 ABC の内接円の半径を r とすると，
$$\triangle ABC=\frac{1}{2}(AB+BC+CA)r$$
が成り立つ．

よって，(i)，(ii) より，
$$6\sqrt{6}=\frac{1}{2}(5+6+7)r.$$
$$9r=6\sqrt{6}.$$
$$r=\mathbf{\frac{2\sqrt{6}}{3}}.$$

(4)(i) 平均値は
$$\frac{0+1+1+2+3+4+4+5+5+5}{10}=\frac{30}{10}$$
$$=\mathbf{3}.$$

(ii) データの値を小さい順に並べたとき，

5 番目が 3，6 番目が 4

であるから，中央値は
$$\frac{3+4}{2}=\mathbf{3.5}.$$

(iii) 平均値が 3 であることから，分散は
$$\begin{aligned}&\frac{1}{10}\{(0-3)^2+(1-3)^2+(1-3)^2\\&\quad+(2-3)^2+(3-3)^2+(4-3)^2\\&\quad+(4-3)^2+(5-3)^2+(5-3)^2+(5-3)^2\}\\&=\frac{1}{10}(9+4+4+1+0+1+1+4+4+4)\\&=\frac{32}{10}\\&=\mathbf{3.2}.\end{aligned}$$

【解説】

(1)(i) $x+y$ に，$x=\sqrt{5}+1$，$y=\sqrt{5}-1$ を直接代入して計算すればよい．

(ii) xy に，$x=\sqrt{5}+1$，$y=\sqrt{5}-1$ を直接代入して展開すればよい．その際に

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$
展開の公式

を用いると計算量を減らすことができる．

(iii) **【解答】**では，$\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}$ を基本対称式 $x+y$，xy を用いて表し，(i)，(ii) の結果を代入して値を求めたが，$\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}$ に，$x=\sqrt{5}+1$，$y=\sqrt{5}-1$ を直接代入して計算しても値を求めることができる．

((1)(iii) の別解)
$$\begin{aligned}\frac{y}{x}+\frac{x}{y}&=\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}+\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}\\&=\frac{(\sqrt{5}-1)^2+(\sqrt{5}+1)^2}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}\\&=\frac{(6-2\sqrt{5})+(6+2\sqrt{5})}{(\sqrt{5})^2-1^2}\\&=\frac{12}{4}\\&=3.\end{aligned}$$

((1)(iii) の別解終り)

(2)(i) 「(*) が $x=0$ を解にもつ」とは，(*) に $x=0$ を代入した式が成り立つことである．

そこで，(*) に $x=0$ を代入すると，

$$|k|=0$$

となり，ここから k の値を求めることができる．

(ii)　(i) と同様に，(*) に $x=1$ を代入すると，

$$|k-1|=1 \quad \cdots (\#)$$

となる．

一般に，

> A が正の数のとき，
>
> $$|X|=A \Longleftrightarrow X=\pm A$$
>
> **絶対値の性質 1**

が成り立つから，**【解答】**では，$X=k-1$，$A=1$ として絶対値記号をはずした．

また，

> $$|X|=\begin{cases} X \ (X \geqq 0 \text{ のとき}), \\ -X \ (X<0 \text{ のとき}) \end{cases}$$
>
> **絶対値の性質 2**

を用いて絶対値記号をはずし，次のように解くこともできる．

((2) (ii) の部分的別解)

(ア)　$k-1 \geqq 0$ のとき．

(#) は

$$k-1=1.$$
$$k=2.$$

これは $k-1 \geqq 0$ を満たす．

(イ)　$k-1<0$ のとき．

(#) は

$$-(k-1)=1.$$
$$k=0.$$

これは $k-1<0$ を満たす．

(ア)，(イ) を合わせて，(#) を満たす k の値は，

$$k=0,\ 2.$$

((2) (ii) の部分的別解終り)

(iii)　$k=0$ のとき，(*) は

$$x^2-|x|=0 \quad \cdots ①$$

となる．

このあと，**【解答】**では**絶対値の性質 2** を用いて場合分けをして ① を解いたが，次のように解くこともできる．

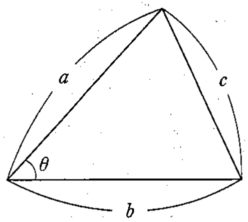
((2) (iii) の部分的別解)

$x^2=|x|^2$ であることに注目すると，① は

$$|x|^2-|x|=0.$$
$$|x|(|x|-1)=0.$$
$$|x|=0,\ 1.$$
$$x=0,\ \pm 1.$$

((2) (iii) の部分的別解終り)

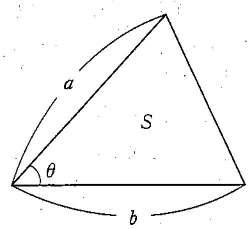
(3) (i)　三角形 ABC において，2 辺の長さとその間の角の余弦の値が与えられているから，



> $$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$$
>
> **余弦定理**

を用いて，辺 CA の長さを求めればよい．

(ii)　三角形の面積を求めるには，



> $$S=\frac{1}{2}ab\sin\theta$$
>
> **三角形の面積**

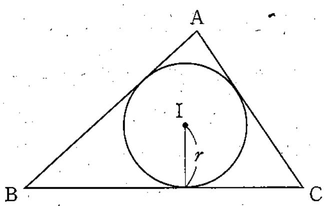
を用いればよい．

このため**【解答】**では，$\cos B=\dfrac{1}{5}$ に注目して

> $$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$
>
> **三角比の相互関係**

を用いて $\sin B$ の値を求めた．

(iii)　一般に次が成り立つ．

> r を三角形 ABC の内接円の半径とすると，三角形 ABC の面積 S は
>
> $$S=\frac{1}{2}(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA})r$$
>
> 
>
>
> **三角形の内接円と面積**

与えられた条件と (i) の結果から三角形 ABC の 3 辺の長さはわかっており，(ii) の結果から三角形 ABC の面積もわかっているから，この公

式を用いて r を求めることができる.

(4)(i)

> データの n 個の値
> $$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$$
> が与えられているとき,
> $$\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$$
> をデータの平均値という
>
> **平均値**

に従って求めればよい.

(ii)

> データの値を大きさの順に並べたとき,中央の位置にくる値を中央値という.
> データの個数が偶数 $2n$ 個のときは,第 n 番目と第 $n+1$ 番目のデータの値の平均値を中央値とする.
>
> **中央値**

に従って求めればよい.

本問では,データの個数が10個(偶数個)であるから,

第 5 番目の 3　と　第 6 番目の 4

の平均値 $\frac{3+4}{2}(=3.5)$ が中央値となる.

0, 1, 1, 2, ③　　④, 4, 5, 5, 5

(iii)

> データの n 個の値
> $$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$$
> が与えられていて,その平均値を $\overline{x}$ とするとき,
> $$\frac{1}{n}\{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2\}$$
> をデータの分散という
>
> **分散**

に従って求めればよい.

また,変量 x の分散については次が成り立つ.

> (x の分散)$=$(x^2 の平均値)$-$(x の平均値)^2
>
> **分散の性質**

これを用いると,次のように解くこともできる.

((4)(iii)の別解)

データの値の 2 乗の平均値は

$$\frac{1}{10}(0^2+1^2+1^2+2^2+3^2+4^2+4^2+5^2+5^2+5^2)=\frac{122}{10}.$$

データの平均値の 2 乗は,(i)より,

$$3^2=9.$$

よって,求める分散は,

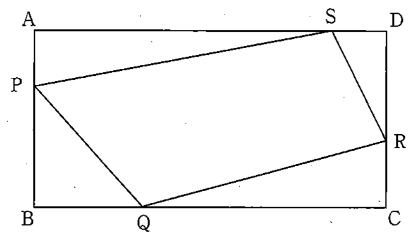
$$\frac{122}{10}-9=\frac{32}{10}=3.2.$$

((4)(iii)の別解終り)

2　2次関数

【I型数学I　必須問題】

(配点　40点)

> a を 1 より大きい定数とする.平面上に長方形 ABCD があり,
> $$\mathrm{AB}=\mathrm{CD}=1;\ \mathrm{BC}=\mathrm{DA}=a$$
> とする.辺 AB, BC, CD, DA 上にそれぞれ点 P, Q, R, S を,
> $$\mathrm{AP}=\mathrm{DS}=x,\ \mathrm{BQ}=\mathrm{RD}=2x\ \left(0<x\leqq\frac{1}{2}\right)$$
> を満たすようにとる.このとき,四角形 PQRS の面積を $f(x)$ とする.
>
> (1) 三角形 APS, PBQ, QCR, RDS の面積をそれぞれ求めよ.
>
> (2) $f(x)$ を求めよ.
>
> (3) x が $0<x\leqq\frac{1}{2}$ の範囲を動くとき,$f(x)$ の最大値を a を用いて表せ.
>
> 
>

【配点】

(1)　12 点.

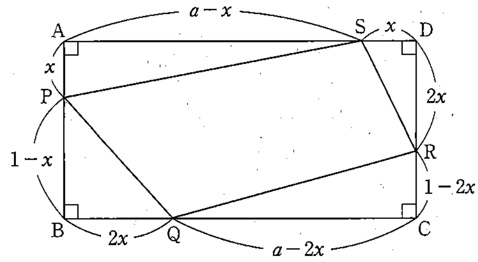
(2)　8 点.

(3)　20 点.

【出題のねらい】

四角形 PQRS の面積を与えられた変数 x を用いて表し,その最大値を a の値によって場合分けをして求められるかをみる問題である.

【解答】



(1)　$\mathrm{AP}=\mathrm{DS}=x,\ \mathrm{BQ}=\mathrm{RD}=2x\ \left(0<x\leqq\dfrac{1}{2}\right)$

のとき，$\mathrm{AB}=\mathrm{CD}=1$，$\mathrm{BC}=\mathrm{DA}=a$ より，

$$\mathrm{PB}=1-x,\ \mathrm{QC}=a-2x,$$
$$\mathrm{CR}=1-2x,\ \mathrm{SA}=a-x$$

となるから，

$$\triangle\mathrm{APS}=\frac{1}{2}\mathrm{AP}\cdot\mathrm{SA}=\boldsymbol{\frac{1}{2}x(a-x)},$$

$$\triangle\mathrm{PBQ}=\frac{1}{2}\mathrm{BQ}\cdot\mathrm{PB}=\boldsymbol{x(1-x)},$$

$$\triangle\mathrm{QCR}=\frac{1}{2}\mathrm{QC}\cdot\mathrm{CR}=\boldsymbol{\frac{1}{2}(a-2x)(1-2x)},$$

$$\triangle\mathrm{RDS}=\frac{1}{2}\mathrm{RD}\cdot\mathrm{DS}=\boldsymbol{x^2}.$$

(2)　$f(x)=$(長方形 ABCD の面積)

$\qquad-(\triangle\mathrm{APS}+\triangle\mathrm{PBQ}+\triangle\mathrm{QCR}+\triangle\mathrm{RDS})$

であるから，(1) の結果を用いると，

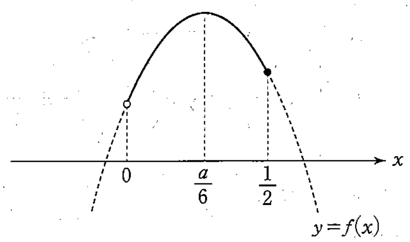
$$\begin{aligned}f(x)&=1\cdot a-\left\{\frac{1}{2}x(a-x)+x(1-x)\right.\\&\qquad\left.+\frac{1}{2}(a-2x)(1-2x)+x^2\right\}\\&=a-\frac{1}{2}(ax-x^2)-(x-x^2)\\&\qquad-\frac{1}{2}(a-2ax-2x+4x^2)-x^2\\&=\boldsymbol{-\frac{3}{2}x^2+\frac{a}{2}x+\frac{a}{2}}.\end{aligned}$$

(3)　(2) より，

$$\begin{aligned}f(x)&=-\frac{3}{2}x^2+\frac{a}{2}x+\frac{a}{2}\\&=-\frac{3}{2}\left(x-\frac{a}{6}\right)^2+\frac{a^2}{24}+\frac{a}{2}.\end{aligned}$$

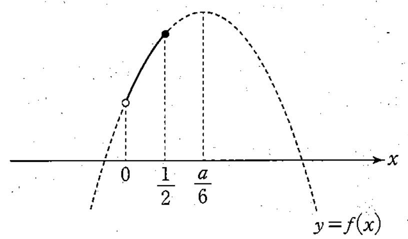
x が $0<x\leqq\dfrac{1}{2}$ の範囲を動くときの $f(x)$ の最大値を M とする．

(i)　$\dfrac{a}{6}\leqq\dfrac{1}{2}$，すなわち $(1<)a\leqq3$ のとき．



$$M=f\left(\frac{a}{6}\right)=\frac{a^2}{24}+\frac{a}{2}.$$

(ii)　$\dfrac{a}{6}>\dfrac{1}{2}$，すなわち $a>3$ のとき．



$$\begin{aligned}M=f\left(\frac{1}{2}\right)&=-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{a}{2}\\&=\frac{3}{4}a-\frac{3}{8}.\end{aligned}$$

(i)，(ii) より，

$$M=\begin{cases}\boldsymbol{\dfrac{a^2}{24}+\dfrac{a}{2}} & \boldsymbol{(1<a\leqq3)},\\[2mm] \boldsymbol{\dfrac{3}{4}a-\dfrac{3}{8}} & \boldsymbol{(a>3)}.\end{cases}$$

【解説】

(1)　三角形 APS，PBQ，QCR，RDS はすべて直角三角形であるから，与えられた辺や線分の長さを図に書き込めば，面積は容易に求められる．

(2)　四角形 PQRS の面積を直接求めるのではなく，(1) の結果を利用して，長方形 ABCD の面積から三角形 APS，PBQ，QCR，RDS の面積を引くとよい．

(3)　$f(x)$ は x の 2 次関数であるから，最大値を求めるときは平方完成して，$y=f(x)$ のグラフを考察することから始める．

> $a\neq0$ のとき，
>
> $$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}$$
>
> **2 次式の平方完成**

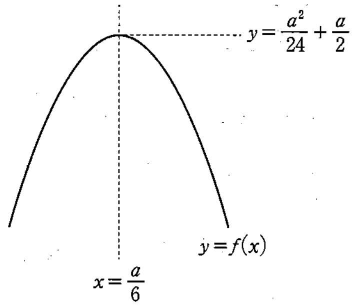
を用いると，

$$f(x)=-\frac{3}{2}x^2+\frac{a}{2}x+\frac{a}{2}$$
$$=-\frac{3}{2}\left(x-\frac{a}{6}\right)^2+\frac{a^2}{24}+\frac{a}{2}$$

となる.

> 2次関数 $y=a(x-p)^2+q\quad(a\neq 0)$ のグラフは,
> $a>0$ のとき,
> 頂点の座標が $(p,\ q)$ の下に凸の放物線,
> $a<0$ のとき,
> 頂点の座標が $(p,\ q)$ の上に凸の放物線
> である
>
> **2次関数のグラフ**

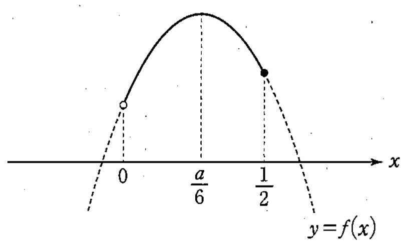
に着目すると, $y=f(x)$ のグラフは, 軸の方程式が $x=\frac{a}{6}$, 頂点の座標が $\left(\frac{a}{6},\ \frac{a^2}{24}+\frac{a}{2}\right)$ の, 上に凸の放物線であるとわかる.



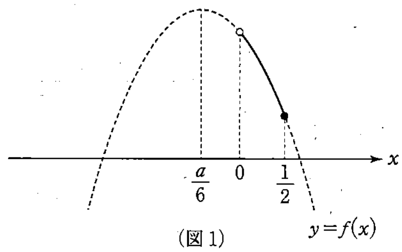
次に, x の動く範囲が $0<x\leqq\frac{1}{2}$ であるから, 軸 $x=\frac{a}{6}$ が $0<x\leqq\frac{1}{2}$ の範囲に含まれるかどうかで場合分けをする.

・軸 $x=\frac{a}{6}$ が $0<x\leqq\frac{1}{2}$ の範囲に含まれる場合,

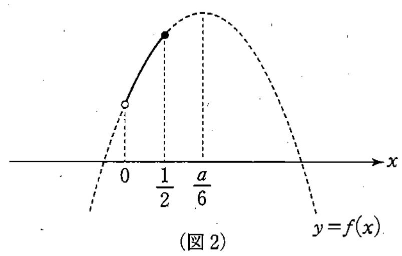
$x=\frac{a}{6}$ で $f(x)$ は最大となる.



・軸 $x=\frac{a}{6}$ が $0<x\leqq\frac{1}{2}$ の範囲に含まれない場合, a の値に $a>1$ という制限がなければ, 次の2つの場合が考えられる.



(図1)



(図2)

本問では $a>1$ であるから $\frac{a}{6}>0$ であり, (図1)の場合ではなく, (図2)の場合に限られる.

このとき, $0<x\leqq\frac{1}{2}$ の範囲で $f(x)$ は増加しているから, $x=\frac{1}{2}$ で $f(x)$ は最大となる.

3 場合の数

【I型数学I, A　選択問題】

(配点　40点)

> A, B, C, D, E, F の6人と P, Q, R, S の4品の料理がある. メニューには P, Q, R, S の4品だけが掲載されていて, 6人はそれぞれ他の人にはわからないようにメニューから1品を選ぶ.
> (1) 6人の料理の選び方は何通りあるか.
> (2) 他のすべての人と違う料理を選んだ人だけがその料理を食べることができるものとする.
> (i) (1)のうち, A が料理を食べることができるのは何通りか.
> (ii) (1)のうち, ちょうど3人が料理を食べることができるのは何通りか.
> (iii) (1)のうち, 誰も料理を食べることができないのは何通りか.

【配点】

(1) 8点.

(2) 32点.

(i) 10点. (ii) 10点. (iii) 12点.

【出題のねらい】

状況を正確に把握し，条件を満たす場合の数を正確に数え上げられるかをみる問題である．

【解答】

(1) A, B, C, D, E, F の6人それぞれに対して，P, Q, R, S のどの料理を選ぶかは4通りずつあるから，求める場合の数は，

$$4^6 = \mathbf{4096}\ \textbf{(通り)}.$$

(2)(i) A が料理を食べることができるのは，A 以外の5人が A の選んだ料理以外の料理を選ぶときである．

A の料理の選び方は

4通り．

A 以外の5人の料理の選び方は，

$$3^5 = 243\ (\text{通り}).$$

よって，A が料理を食べることができるのは，

$$4 \times 243 = \mathbf{972}\ \textbf{(通り)}.$$

(ii) ちょうど3人が料理を食べることができるのは，3人がそれぞれ他の人とは異なる料理を選び，残り3人は，料理を食べることができる3人が選んだ料理以外の1品を選ぶときである．

料理を食べることができる3人の選び方は，

$${}_6C_3 = 20\ (\text{通り}).$$

料理を食べることができる3人の料理の選び方は，

$${}_4P_3 = 24\ (\text{通り}).$$

残り3人の料理の選び方は

1通り．

よって，ちょうど3人が料理を食べることができるのは，

$$20 \times 24 \times 1 = \mathbf{480}\ \textbf{(通り)}.$$

(iii) 誰も料理を食べることができないのは，同じ料理を選ぶ人数の組が次の(ア)～(エ)の場合である．

(ア) 3人，3人．
(イ) 2人，2人，2人．
(ウ) 4人，2人．
(エ) 6人．

(ア) 3人，3人の場合．

3人が同じ料理を選び，別の3人が別の同じ料理を選ぶことになる．

$$\begin{cases} 2\text{組の分け方は，}\dfrac{{}_6C_3 \cdot {}_3C_3}{2!} = 10\ (\text{通り}), \\ \text{料理の選び方は，}{}_4P_2 = 12\ (\text{通り}). \end{cases}$$

よって，(ア)の場合の6人の料理の選び方は，

$$10 \times 12 = 120\ (\text{通り}).$$

(イ) 2人，2人，2人の場合．

2人が同じ料理を選び，別の2人が別の同じ料理を選び，さらに別の2人が前の2組とは別の同じ料理を選ぶことになる．

$$\begin{cases} 3\text{組の分け方は，}\dfrac{{}_6C_2 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_2C_2}{3!} = 15\ (\text{通り}), \\ \text{料理の選び方は，}{}_4P_3 = 24\ (\text{通り}). \end{cases}$$

よって，(イ)の場合の6人の料理の選び方は，

$$15 \times 24 = 360\ (\text{通り}).$$

(ウ) 4人，2人の場合．

4人が同じ料理を選び，2人が別の同じ料理を選ぶことになる．

$$\begin{cases} 2\text{組の分け方は，}{}_6C_4 \cdot {}_2C_2 = 15\ (\text{通り}), \\ \text{料理の選び方は，}{}_4P_2 = 12\ (\text{通り}). \end{cases}$$

よって，(ウ)の場合の6人の料理の選び方は，

$$15 \times 12 = 180\ (\text{通り}).$$

(エ) 6人の場合．

6人全員が同じ料理を選ぶことになる．

$$\begin{cases} 1\text{組の分け方は，}{}_6C_6 = 1\ (\text{通り}), \\ \text{料理の選び方は，}{}_4C_1 = 4\ (\text{通り}). \end{cases}$$

よって，(エ)の場合の6人の料理の選び方は，

$$1 \times 4 = 4\ (\text{通り}).$$

(ア)～(エ)より，誰も料理を食べることができないのは，

$$120 + 360 + 180 + 4 = \mathbf{664}\ \textbf{(通り)}.$$

【解説】

(1) A, B, C, D, E, F の6人は，誰かがすでに選んだ料理も選ぶことができる．すなわち，P, Q, R, S の中から重複を許して選んでよい．

6人それぞれが4品の中から1品を選ぶのであるから，求める場合の数は，

$$4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4096\ (\text{通り})$$

となる．

(2)(i) A が料理を食べることができるのは，A 以外の5人が A の選んだ料理を選んでいない場合である．

A の料理の選び方は，P, Q, R, S の4品から1品を選ぶことから，

4通り．

A 以外の B ～ F の5人は，A が選んだ料理以外のどの料理を選んでもよい．したがって，B ～ F の5人の料理の選び方は，A が選んだ料

理以外の3品から選べばよいから，

$$3\times3\times3\times3\times3=243\ (\text{通り}).$$

Aの料理の選び方4通りに対して，それぞれB～Fの5人の料理の選び方が243通りずつあるから，

> 2つの事柄 P, Q があって，P の起こり方が m 通りあり，その各々に対して Q の起こり方が n 通りあるとき，「P, Q がともに起こる場合の数」は
>
> mn 通り
>
> **積の法則**

を用いて，求める場合の数は，

$$4\times243=972\ (\text{通り})$$

となる．

(ii) ちょうど3人が料理を食べることができるのは，同じ料理を選ぶ人数の組が「1人，1人，1人，3人」の場合である．

料理を食べることができる3人の選び方は，A, B, C, D, E, F の6人から3人を選ぶことから，

> 異なる n 個のものから(順序は問題にしないで)異なる r 個を取り出して1組としたものを「n 個から r 個とる組合せ」といい，その総数は，
>
> $${}_n\mathrm{C}_r=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)\cdots2\cdot1}$$
>
> **組合せ**

を用いて，

$${}_6\mathrm{C}_3=\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=20\ (\text{通り}).$$

料理を食べることができる3人は，それぞれ他の人とは異なる料理を選んでいる．この3人の料理の選び方は，P, Q, R, S の4品からそれぞれが異なる1品を選ぶことから，

> 異なる n 個のものから，異なる r 個を取り出して並べる方法の総数は，
>
> $${}_n\mathrm{P}_r=\frac{n!}{(n-r)!}=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$
>
> **順列**

を用いて，

$${}_4\mathrm{P}_3=4\cdot3\cdot2=24\ (\text{通り}).$$

料理を食べることができない3人は，料理を食べることができる3人が選んだ料理以外の1品を全員が選んでいる．この3人の料理の選び方は

1通り．

料理を食べることができる3人の選び方20通りに対して，それぞれ料理の選び方が $(24\cdot1=)24$ 通りずつあるから，**積の法則**を用いて，求める場合の数は，

$$20\times24=480\ (\text{通り})$$

となる．

(iii) 誰も料理を食べることができないのは，全員が自分以外の誰かと同じ料理を選んでいる場合である．このことから，同じ料理を選ぶ人数の組が次の場合に限られる．

(ア) 3人，3人．
(イ) 2人，2人，2人．
(ウ) 4人，2人．
(エ) 6人．

(ア) 3人，3人の場合．

3人，3人の2組をそれぞれ甲，乙と区別すると，分け方は，

$${}_6\mathrm{C}_3\cdot{}_3\mathrm{C}_3=20\ (\text{通り}).$$

組を区別しないときの1通りの組分けに対し，組を区別したときの2通りの組分けが対応する．

例えば，組を区別しないときの1つの組分け

A, B, C | D, E, F

に対して，組を区別したときの

(甲：A, B, C | 乙：D, E, F),
(甲：D, E, F | 乙：A, B, C)

の2通りの組分けが対応する．

よって，6人を3人，3人の2組に分ける分け方は，

$$\frac{20}{2!}=10\ (\text{通り}).$$

また，料理の選び方は，P, Q, R, S の4品からそれぞれの組が1品ずつ選ぶことから，

$${}_4\mathrm{P}_2=12\ (\text{通り}).$$

組の分け方10通りに対して，それぞれ料理の選び方が12通りずつあるから，**積の法則**を用いて，

$$10\times12=120\ (\text{通り}).$$

(イ) 2人，2人，2人の場合．

(ア)と同様にして考える．

組を区別したときの分け方は，

$${}_6\mathrm{C}_2\cdot{}_4\mathrm{C}_2\cdot{}_2\mathrm{C}_2=90\ (\text{通り}).$$

組を区別しないときの1通りの組分けに対

し，組を区別したときの 3! 通りの組分けが対応するから，6 人を 2 人，2 人，2 人の 3 組に分ける分け方は，

$$\frac{90}{3!}=15 \text{（通り）}.$$

また，料理の選び方は，P，Q，R，S の 4 品からそれぞれの組が 1 品ずつ選ぶことから，

$${}_4P_3=24 \text{（通り）}.$$

組の分け方 15 通りに対して，それぞれ料理の選び方が 24 通りずつあるから，**積の法則**を用いて，

$$15\times24=360 \text{（通り）}.$$

(ウ) 4 人，2 人の場合.

6 人を 4 人，2 人の 2 組に分ける分け方は，

$${}_6C_4\cdot{}_2C_2=15 \text{（通り）}.$$

また，料理の選び方は，P，Q，R，S の 4 品からそれぞれの組が 1 品ずつ選ぶことから，

$${}_4P_2=12 \text{（通り）}.$$

組の分け方 15 通りに対して，それぞれ料理の選び方が 12 通りずつあるから，**積の法則**を用いて，

$$15\times12=180 \text{（通り）}.$$

(エ) 6 人の場合.

6 人全員が同じ料理を選ぶことになり，P，Q，R，S の 4 品から 1 品選ぶことから，

$${}_4C_1=4 \text{（通り）}.$$

(ア)～(エ) より，求める場合の数は，

$$120+360+180+4=664 \text{（通り）}$$

となる.

((2)(iii) の別解)

選ばれる料理の品数で場合分けをする.

誰も料理を食べることができないとき，選ばれる料理の品数は，

1 品，2 品，3 品

のいずれかである.

(オ) ちょうど 1 品のとき.

P，Q，R，S のうち，どの 1 品を選ぶかは 4 通りあり，6 人全員がその料理を選ぶことから，

4 通り.

(カ) ちょうど 2 品のとき.

P，Q，R，S のうち，どの 2 品を選ぶかが，

$${}_4C_2=6 \text{（通り）}.$$

6 人全員が 2 品のうちどちらかを選ぶのは，

$$2^6=64 \text{（通り）}$$

であり，このうち，

全員が同じ料理を選ぶ場合が 2 通り，
1 人だけが他と違う料理を選ぶ場合が，

$$6\cdot2=12 \text{（通り）}$$

であるから，6 人の料理の選び方は，

$$64-2-12=50 \text{（通り）}.$$

よって，ちょうど 2 品が選ばれ，誰も料理を食べることができないのは，

$$6\times50=300 \text{（通り）}.$$

(キ) ちょうど 3 品のとき.

P，Q，R，S のうち，どの 3 品を選ぶかが，

$${}_4C_3=4 \text{（通り）}.$$

例えば，P，Q，R の 3 品が選ばれたとすると，

P，P，Q，Q，R，R

を A，B，C，D，E，F のそれぞれが 1 つずつ選ぶことになり，この選び方は，

$$\frac{6!}{2!2!2!}=90 \text{（通り）}.$$

よって，ちょうど 3 品が選ばれ，誰も料理を食べることができないのは，

$$4\times90=360 \text{（通り）}.$$

(オ)，(カ)，(キ) より，誰も料理を食べることができないのは，

$$4+300+360=664 \text{（通り）}.$$

（(2)(iii) の別解終り）

4 図形の性質

【I 型数学 I，A　選択問題】

（配点　40点）

三角形 ABC の辺 AB，AC 上にそれぞれ点 D，E があり，

$$AD=3,\ DB=5,\ AE=4,\ EC=2$$

とする.

また，線分 CD と線分 BE の交点を F とする.

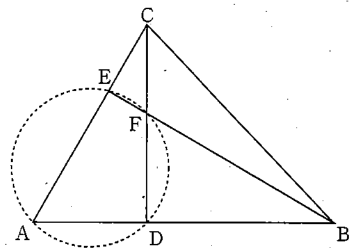
四角形 ADFE が円に内接するとき，次の問に答えよ.

(1) BF・BE の値を求めよ.

(2) BF : FE を求め，線分 BF，FE，BE の長さをそれぞれ求めよ.

(3) ∠AEB の大きさを求めよ.

(4) 直線 AF と辺 BC の交点を P とするとき，線分 AP の長さを求めよ.



【配点】

(1)　6 点.

(2)　16 点.

(3)　6 点.

(4)　12 点.

【出題のねらい】

方べきの定理，メネラウスの定理，チェバの定理を正しく用いられるか，また，その結果を用いて図形量を正しく求められるかをみる問題である.

【解答】

(1)　方べきの定理より，

$$\begin{aligned} BF \cdot BE &= BD \cdot BA \\ &= 5 \cdot 8 \\ &= \mathbf{40}. \end{aligned} \quad \cdots ①$$

(2)　メネラウスの定理より，

$$\frac{AC}{CE} \cdot \frac{EF}{FB} \cdot \frac{BD}{DA} = 1.$$

$$\frac{6}{2} \cdot \frac{EF}{FB} \cdot \frac{5}{3} = 1.$$

$$\frac{EF}{FB} = \frac{1}{5}.$$

よって，

$$BF : FE = \mathbf{5 : 1}. \quad \cdots ②$$

次に，$FE = x\ (>0)$ とおくと，② より，

$$BF = 5x,\ BE = BF + FE = 6x$$

であり，① より，

$$5x \cdot 6x = 40.$$

$$30x^2 = 40.$$

$$x^2 = \frac{4}{3}.$$

$x > 0$ より，

$$x = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

であるから，

$$BF = 5x = \mathbf{\frac{10\sqrt{3}}{3}},\ FE = x = \mathbf{\frac{2\sqrt{3}}{3}},$$

$$BE = 6x = \mathbf{4\sqrt{3}}.$$

(3)　(2) より，

$$AE = 4,\ AB = 8,\ BE = 4\sqrt{3}.$$

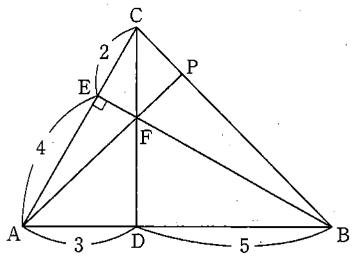
よって，三角形 ABE において，

$$AE : AB : BE = 1 : 2 : \sqrt{3}$$

であるから，

$$\angle AEB = \mathbf{90^\circ}.$$

(4)



チェバの定理より，

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1.$$

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{2}{4} = 1.$$

$$\frac{BP}{PC} = \frac{10}{3}. \quad \cdots ③$$

また，メネラウスの定理より，

$$\frac{BC}{CP} \cdot \frac{PF}{FA} \cdot \frac{AD}{DB} = 1 \quad \cdots ④$$

であり，③ より，

$$\frac{BC}{CP} = \frac{13}{3}$$

であるから，④ より，

$$\frac{13}{3} \cdot \frac{PF}{FA} \cdot \frac{3}{5} = 1.$$

$$\frac{PF}{FA} = \frac{5}{13}. \quad \cdots ⑤$$

また，(3) より，三角形 AEF は直角三角形であるから，三平方の定理より，

$$\begin{aligned} AF &= \sqrt{AE^2 + EF^2} \\ &= \sqrt{4^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} \\ &= \frac{2\sqrt{39}}{3}. \end{aligned}$$

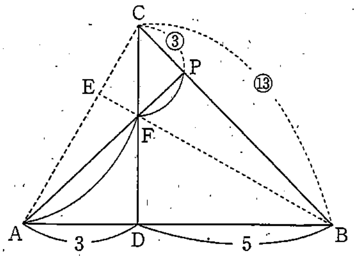
よって，⑤ より，

$$\begin{aligned} AP &= \frac{18}{13} AF \\ &= \mathbf{\frac{12\sqrt{39}}{13}}. \end{aligned}$$

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{BP}{PC}\cdot\frac{2}{4}=1.$$

$$\frac{BP}{PC}=\frac{10}{3}. \qquad \cdots③$$

次に，三角形 ABP と直線 DC にメネラウスの定理を用いると，



$$\frac{BC}{CP}\cdot\frac{PF}{FA}\cdot\frac{AD}{DB}=1 \qquad \cdots④$$

が得られる．

③より，

$$BP:PC=10:3$$

であるから，

$$BC:CP=(10+3):3$$
$$=13:3,$$

すなわち，

$$\frac{BC}{CP}=\frac{13}{3}.$$

これと，AD＝3，DB＝5 を④に代入すると，

$$\frac{13}{3}\cdot\frac{PF}{FA}\cdot\frac{3}{5}=1.$$

$$\frac{PF}{FA}=\frac{5}{13}. \qquad \cdots⑤$$

これより，

$$AF:FP=13:5$$

であるから，

$$AP:AF=(13+5):13$$
$$=18:13$$

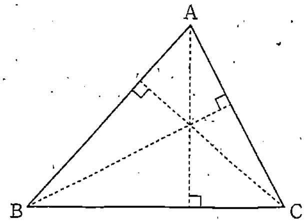
であり，

$$AP=\frac{18}{13}AF$$

と表せる．

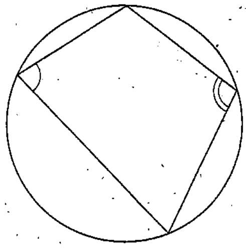
あとは，直角三角形 AEF に三平方の定理を用いて AF の長さを求め，この式に代入すればよい．

また，



三角形 ABC の頂点 A，B，C から向かい合う辺またはその延長に下ろした垂線は 1 点で交わり，この交点を三角形 ABC の垂心という

三角形の垂心



四角形が円に内接するとき，向かい合う内角の和は 180° である

円に内接する四角形と内角

を用いると，次のように求めることもできる．

((4) の別解)

四角形 ADFE は円に内接しているから，

$$\angle AEF+\angle ADF=180°$$

であり，(3) より，

$$\angle AEF=90° \qquad \cdots⑥$$

であるから，

$$\angle ADF=90°. \qquad \cdots⑦$$

⑥，⑦より，

F は三角形 ABC の垂心

である．

これより，

$$\angle APC=90°$$

であり，

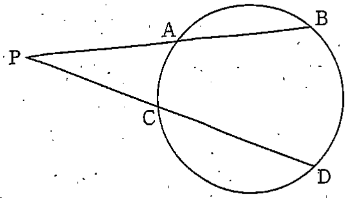
$$\triangle ACP \backsim \triangle AFE$$

であるから，

$$AP:AE=AC:AF. \qquad \cdots⑧$$

【解説】

(1) 四角形 ADFE の外接円と線分 BE, BA に,



円の 2 つの弦 AB, CD の交点，またはそれらの延長の交点を P とすると,

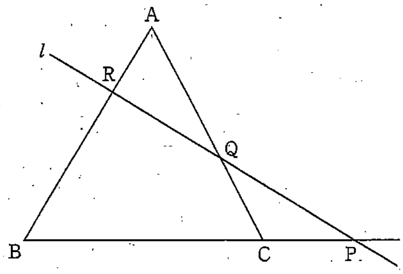
$$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PC}\cdot\mathrm{PD}$$

が成り立つ

方べきの定理

を用いればよい.

(2) 三角形 ABE と直線 CD に,



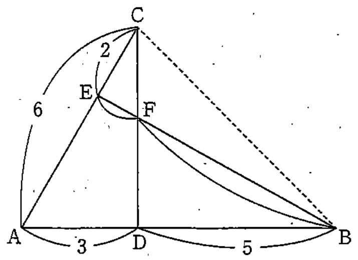
三角形 ABC の辺 BC, CA, AB またはその延長が，三角形の頂点を通らない直線 l と，それぞれ P, Q, R で交わるとき,

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$$

が成り立つ

メネラウスの定理

を用いると,



$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CE}}\cdot\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FB}}\cdot\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DA}}=1$$

が得られ，これに,

$\mathrm{AC}=6,\ \mathrm{CE}=2,\ \mathrm{BD}=5,\ \mathrm{DA}=3$

を代入すると,

$$\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FB}}=\frac{1}{5},\ \text{すなわち},\ \frac{\mathrm{FE}}{\mathrm{BF}}=\frac{1}{5}.$$

これより,

$$\mathrm{BF}:\mathrm{FE}=5:1 \qquad \cdots②$$

であり，$\mathrm{FE}=x\,(>0)$ とおくと，② より,

$$\mathrm{BF}=5x,\ \mathrm{BE}=\mathrm{BF}+\mathrm{FE}=6x$$

と表せる.

あとは，これらを ① に用いて x の値を求め，BF, FE, BE の長さを求めればよい.

(3) 与えられた条件と (2) より，三角形 ABE の 3 辺の長さは,

$$\mathrm{AE}=4,\ \mathrm{AB}=8,\ \mathrm{BE}=4\sqrt{3}.$$

これらより,

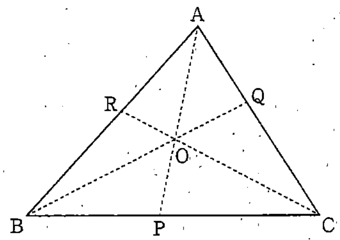
$$\mathrm{AE}:\mathrm{AB}:\mathrm{BE}=1:2:\sqrt{3}$$

であるから，三角形 ABE は,

$\angle\mathrm{AEB}=90^\circ$ の直角三角形

であることがわかる.

(4) まず，三角形 ABC に,



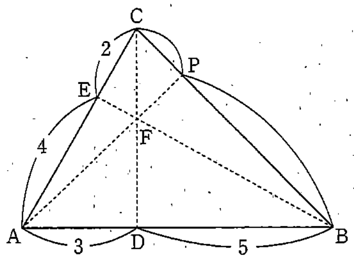
三角形 ABC の内部に点 O がある．頂点 A, B, C と O を結ぶ直線が向かい合う辺と，それぞれ P, Q, R で交わるとき,

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$$

が成り立つ

チェバの定理

を用いると,

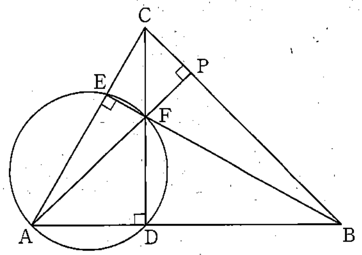


$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}=1$$

が得られ，これに,

$\mathrm{AD}=3,\ \mathrm{DB}=5,\ \mathrm{CE}=2,\ \mathrm{EA}=4$

を代入すると,



そこで，直角三角形 AEF に三平方の定理を用いると，

$$\mathrm{AF}=\sqrt{\mathrm{AE}^2+\mathrm{EF}^2}$$
$$=\sqrt{4^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}$$
$$=\frac{2\sqrt{39}}{3}.$$

よって，⑧より，

$$\mathrm{AP}:4=6:\frac{2\sqrt{39}}{3}.$$
$$\mathrm{AP}=\frac{12\sqrt{39}}{13}.$$

((4) の別解終り)

【Ⅱ型受験者用】

1 小問集合

【Ⅱ型共通　必須問題】

(配点　50点)

(1) $\tan\theta=2\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ のとき，次の値を求めよ．

(i) $\sin\theta$　(ii) $\sin 2\theta$　(iii) $\tan(\pi-2\theta)$

(2) サイコロを3回投げる．

(i) 出た目の積が奇数となる確率を求めよ．

(ii) 出た目の積が5の倍数となる確率を求めよ．

(3) $a=\log_{10}2$, $b=\log_{10}7$ とおくとき，次の式の値を a, b を用いて表せ．

(i) $\log_{10}8$　(ii) $\log_2 14$　(iii) $\log_{10}35$

(4) 次の等式を満たす定数 a の値を求めよ．

$$\int_0^2 (x^3-ax)\,dx=0$$

(5) 点 (1, 2) を中心とする半径3の円を C とし，直線 $3x+4y-1=0$ を l とする．

(i) C の中心と l の距離を求めよ．

(ii) l が C によって切り取られる線分の長さを求めよ．

【配点】

(1) 12点.
(i) 4点.　(ii) 4点.　(iii) 4点.

(2) 8点.
(i) 4点.　(ii) 4点.

(3) 12点.
(i) 4点.　(ii) 4点.　(iii) 4点.

(4) 8点.

(5) 10点.
(i) 5点.　(ii) 5点.

【出題のねらい】

(1) 三角関数の相互関係や2倍角の公式を正しく理解しているかをみる問題である．

(2) 事象を正しく把握して確率を求められるかをみる問題である．

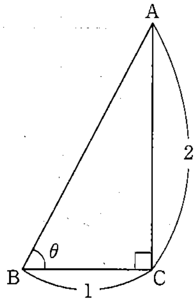
(3) 対数の計算法則を正しく理解しているかをみる問題である．

(4) 定積分を正しく計算できるかをみる問題である．

(5) 点と直線の距離の公式を用いて線分の長さを求められるかをみる問題である．

【解答】

(1)　$\tan\theta=2\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ より，θ は次図の角である．



(i)　図において，$AB=\sqrt{5}$ であるから，

$$\sin\theta=\frac{AC}{AB}=\boldsymbol{\frac{2}{\sqrt{5}}}.$$

(ii)　$$\cos\theta=\frac{BC}{AB}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\sin2\theta&=2\sin\theta\cos\theta\\&=2\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\\&=\boldsymbol{\frac{4}{5}}.\end{aligned}$$

(iii)　$$\begin{aligned}\tan(\pi-2\theta)&=-\tan2\theta\\&=-\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\\&=-\frac{2\cdot2}{1-2^2}\\&=\boldsymbol{\frac{4}{3}}.\end{aligned}$$

(2)(i)　出た目の積が奇数となるのは，3回とも奇数の目が出るときである．奇数の目は1，3，5であるから，求める確率は，

$$\left(\frac{3}{6}\right)^3=\boldsymbol{\frac{1}{8}}.$$

(ii)　出た目の積が5の倍数とならないのは，3回とも5の倍数の目が出ないときである．5の倍数の目は5のみであるから，この確率は，

$$\left(1-\frac{1}{6}\right)^3=\frac{125}{216}.$$

よって，余事象を考えて，求める確率は，

$$1-\frac{125}{216}=\boldsymbol{\frac{91}{216}}.$$

(3)(i)　$$\begin{aligned}\log_{10}8&=\log_{10}2^3\\&=3\log_{10}2\\&=\boldsymbol{3a}.\end{aligned}$$

(ii)　底の変換公式を用いると，

$$\begin{aligned}\log_2 14&=\frac{\log_{10}14}{\log_{10}2}\\&=\frac{\log_{10}2\cdot7}{\log_{10}2}\\&=\frac{\log_{10}2+\log_{10}7}{\log_{10}2}\\&=\boldsymbol{\frac{a+b}{a}}.\end{aligned}$$

(iii)　$$\begin{aligned}\log_{10}35&=\log_{10}5\cdot7\\&=\log_{10}5+\log_{10}7\\&=\log_{10}\frac{10}{2}+\log_{10}7\\&=1-\log_{10}2+\log_{10}7\\&=\boldsymbol{1-a+b}.\end{aligned}$$

(4)　$$\begin{aligned}\int_0^2(x^3-ax)\,dx&=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a}{2}x^2\right]_0^2\\&=4-2a.\end{aligned}$$

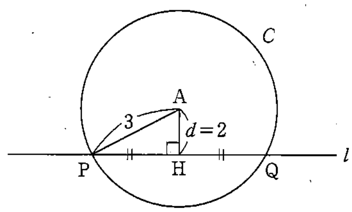
よって，$\displaystyle\int_0^2(x^3-ax)\,dx=0$ のとき，

$$4-2a=0.$$
$$a=\boldsymbol{2}.$$

(5)(i)　求める距離を d とすると，点と直線の距離の公式から，

$$\begin{aligned}d&=\frac{|3\cdot1+4\cdot2-1|}{\sqrt{3^2+4^2}}\\&=\frac{10}{5}\\&=\boldsymbol{2}.\end{aligned}$$

(ii)



C の中心を A とし，C と l の2交点を P，Q とする．線分 PQ の長さを求めればよい．

A から l に下ろした垂線の足を H とすると，

$$\begin{aligned}PH&=\sqrt{AP^2-AH^2}\\&=\sqrt{3^2-2^2}\\&=\sqrt{5}.\end{aligned}$$

よって，

$$PQ=2PH=\boldsymbol{2\sqrt{5}}.$$

【解説】

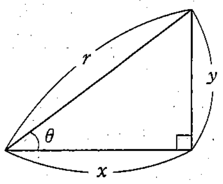
(1)(i)　θ が鋭角であることに注目して

図の直角三角形において，

$$\sin\theta=\frac{y}{r}$$

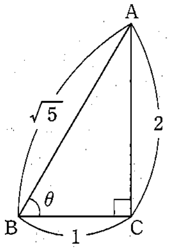
$$\cos\theta=\frac{x}{r}$$

$$\tan\theta=\frac{y}{x}$$



三角比の定義

に従うと，$\tan\theta=2$ より，θ は次図の角である．



あとは定義に従って，$\sin\theta$ の値を求めればよい．

(ii)　(i)と同様にして $\cos\theta$ の値を求めたあと，

$$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta$$

2倍角の公式1

を用いればよい．

(iii)

$$\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$$

$\pi-\theta$ の三角関数

を用いると，

$$\tan(\pi-2\theta)=-\tan2\theta$$

となる．

あとは

$$\tan2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

2倍角の公式2

を用いればよい．

また，$\tan2\theta$ の値を求めるのに，(ii)の結果を用いて次のようにしてもよい．

((1)(iii)の部分的別解)

(ii)より，

$$\sin2\theta=\frac{4}{5}.$$

また，(i)，(ii)より，

$$\cos2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2-\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2=-\frac{3}{5}.$$

よって，

$$\tan2\theta=\frac{\sin2\theta}{\cos2\theta}=\frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}=-\frac{4}{3}.$$

((1)(iii)の部分的別解終り)

(2)(i)　出た目の積が奇数となるのは，3回とも奇数の目が出るときである．奇数の目は1，3，5のいずれかであるから，

全事象が m 通りあり，すべて同様に確からしいとする．このとき，事象 A の起こる場合が n 通りあれば，A の起こる確率 $P(A)$ は，

$$P(A)=\frac{n}{m}$$

確率の定義

に従えば，サイコロを1回投げたときに，奇数の目が出る確率は，

$$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

サイコロを投げる操作は各回で独立であるから，

2つの試行 T_1，T_2 が独立であるとき，T_1 で事象 A が起こり，T_2 で事象 B が起こる確率は

$$P(A)\cdot P(B)$$

独立な試行の確率

を用いて，出た目の積が奇数となる確率は，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$

となる．

(ii)　**【解答】**では，出た目の積が5の倍数とならない確率を求めて，

事象 A に対して，A が起こらない事象を A の余事象といい，$\overline{A}$ で表す．このとき，

$$P(\overline{A})=1-P(A)$$

余事象の確率

を用いて，出た目の積が5の倍数となる確率を求めた．

また，余事象を用いずに，次のように解くこともできる．

((2)(ii)の別解)

出た目の積が5の倍数となるのは，3回のサイコロの目が次のようになるときである．

{5, ＊, ＊}, {5, 5, ＊}, {5, 5, 5}.

(ただし，＊は5以外の目を表すものとする)

よって，求める確率は，

$${}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^2+{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{91}{216}.$$

((2)(ii)の別解終り)

(3)(i)

> $a>0$，$a\neq1$，$M>0$，$N>0$ で k を実数とするとき，
> $$\log_a MN=\log_a M+\log_a N$$
> $$\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$$
> $$\log_a M^k=k\log_a M$$
> **対数の性質**

を用いればよい．

(ii) **【解答】**では，

> $a>0$，$b>0$，$c>0$，$a\neq1$，$c\neq1$ のとき，
> $$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$$
> **底の変換公式**

を用いて

$$\log_2 14=\frac{\log_{10}14}{\log_{10}2}$$

としたあと，対数の性質を用いて

$$\frac{\log_{10}14}{\log_{10}2}=\frac{\log_{10}2\cdot7}{\log_{10}2}=\frac{\log_{10}2+\log_{10}7}{\log_{10}2}$$

とした．

(iii) **【解答】**では，対数の性質を用いて

$$\log_{10}35=\log_{10}5\cdot7=\log_{10}5+\log_{10}7$$

としたあと，$\log_{10}5$ を a，b を用いて表すために

$$\log_{10}5=\log_{10}\frac{10}{2}$$
$$=\log_{10}10-\log_{10}2$$
$$=1-\log_{10}2$$

と変形した．

(4) 一般に，

> n を0以上の整数，C を積分定数とするとき，
> $$\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$$
> **x^n の不定積分**

が成り立つ．

したがって，$\int_0^2(x^3-ax)dx$ において，x^3-ax の原始関数の1つは

$$\frac{1}{4}x^4-\frac{a}{2}x^2$$

である．

このことから，

$$\int_0^2(x^3-ax)dx=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a}{2}x^2\right]_0^2$$
$$=4-2a$$

となる．

あとは

$$4-2a=0$$

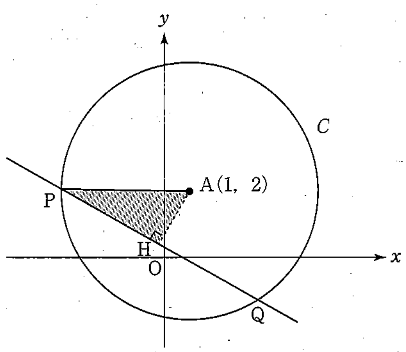
を満たす a の値を求めればよい．

(5)(i)

> 点 $(x_0,\ y_0)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離を d とすると，
> $$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
> **点と直線の距離**

を用いればよい．

(ii)



C の中心を $\mathrm{A}(1,\ 2)$，半径を $r(=3)$ とする．

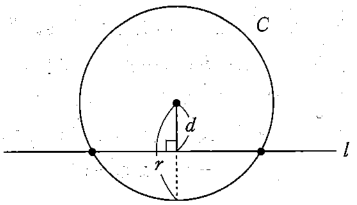
(i)の結果から，

$$d<r$$

であるから，

円 C と直線 l について，C の半径を r，C の中心と l の距離を d とする．

$d<r$ のとき，C と l は異なる2点で交わる



円と直線の位置関係

により，C と l は異なる2点で交わる．この2点をP，Qとすると，l が C によって切り取られる線分は線分PQである．

Aから l に下ろした垂線の足をHとすると，三角形APHに三平方の定理を用いて，

$$\begin{aligned}PH&=\sqrt{AP^2-AH^2}\\&=\sqrt{r^2-d^2}\\&=\sqrt{3^2-2^2}\\&=\sqrt{5}\end{aligned}$$

となる．

さらに，Hは線分PQの中点となるから，

$$PQ=2PH=2\sqrt{5}$$

となる．

$\boxed{2}$ 場合の数

【Ⅱ型共通　必須問題】

（配点　50点）

A, B, C, D, E, F の6人と P, Q, R, S の4品の料理がある．メニューには P, Q, R, S の4品だけが掲載されていて，6人はそれぞれ他の人にはわからないようにメニューから1品を選ぶ．

(1) 6人の料理の選び方は何通りあるか．

(2) 他のすべての人と違う料理を選んだ人だけがその料理を食べることができるものとする．

(i) (1)のうち，Aが料理を食べることができるのは何通りか．

(ii) (1)のうち，ちょうど3人が料理を食べることができるのは何通りか．

(iii) (1)のうち，誰も料理を食べることができないのは何通りか．

【配点】

(1) 10点．

(2) 40点．

(i) 12点．(ii) 12点．(iii) 16点．

【出題のねらい】

状況を正確に把握し，条件を満たす場合の数を正確に数え上げられるかをみる問題である．

【解答】 Ⅰ型 $\boxed{3}$ 【解答】参照．

【解説】 Ⅰ型 $\boxed{3}$ 【解説】参照．

$\boxed{3}$ 三角関数

【Ⅱ型共通　必須問題】

（配点　50点）

$0\leqq\theta\leqq\pi$ で定義された関数 $f(\theta)$ を

$$f(\theta)=4\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta-4\cos^2\theta-(\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta)$$

とする．

(1) $t=\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$ とおく．

(i) $f(\theta)$ を t を用いて表せ．

(ii) θ が $0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲を動くとき，t のとり得る値の範囲を求めよ．

(2) a は実数の定数とし，θ の方程式 $f(\theta)=a$ が $0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲に異なる3つの解をもつとする．

(i) a のとり得る値の範囲を求めよ．

(ii) 3つの解の和が $\frac{5}{3}\pi$ となるような a の値を求めよ．

【配点】

(1) 22点．

(i) 10点．(ii) 12点．

(2) 28点．

(i) 18点．(ii) 10点．

【出題のねらい】

三角関数に関する方程式の解と，置き換えによって得られた2次方程式の解の対応関係の理解度をみる問題である．

【解答】

(1)(i) $t=\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$ より，

$$t^2=3\sin^2\theta+2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$$
$$=3(1-\cos^2\theta)+2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$$
$$=2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta-2\cos^2\theta+3.$$

よって，

$$2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta-2\cos^2\theta=t^2-3$$

となるから，$f(\theta)$ を t を用いて表すと，

$$\boldsymbol{f(\theta)=2(t^2-3)-t}$$
$$\boldsymbol{=2t^2-t-6.}$$

(ii) $t=\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$ は

$$t=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$$

と変形できる．

θ が $0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲を動くとき，$\theta+\dfrac{\pi}{6}$ は

$$\frac{\pi}{6}\leqq\theta+\frac{\pi}{6}\leqq\frac{7}{6}\pi$$

の範囲を動くから，t のとり得る値の範囲は

$$2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\leqq t\leqq 2\cdot 1.$$

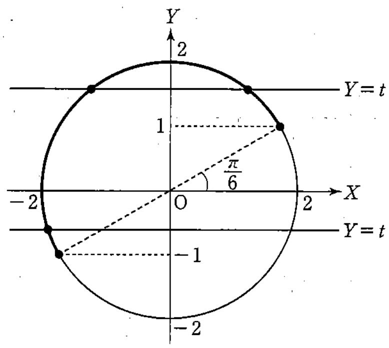
$$\boldsymbol{-1\leqq t\leqq 2.}$$

(2)(i) 与えられた実数 t に対して，

$$t=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right),\ 0\leqq\theta\leqq\pi$$

を満たす θ の個数は，次のようになる．

$$\begin{cases}1\leqq t<2 \text{ のとき，2個,}\\ -1\leqq t<1,\ t=2 \text{ のとき，1個,}\\ t<-1,\ 2<t \text{ のとき，0個.}\end{cases}$$



したがって，方程式 $f(\theta)=a$ が $0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲に異なる3つの解をもつ条件は，t の2次方程式

$$2t^2-t-6=a$$

が異なる2つの解をもち，その解が，

「$1\leqq t<2$ の範囲に1つあり」

かつ

「$-1\leqq t<1$ または $t=2$ の範囲に1つある」

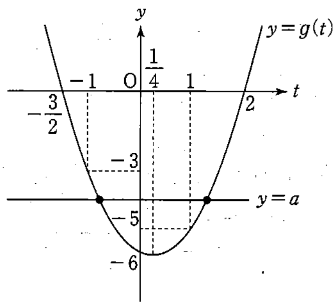
ことである．

$$g(t)=2t^2-t-6$$
$$=2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{49}{8}$$

とおくと，方程式 $g(t)=a$ の実数解は，ty 平面において，放物線 $y=g(t)$ と直線 $y=a$ の共有点の t 座標と一致する．

よって，次図より，a のとり得る値の範囲は，

$$\boldsymbol{-5\leqq a\leqq -3.}$$



(ii) 方程式 $f(\theta)=a$ の3つの解を

$$\theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3\quad(0\leqq\theta_1<\theta_2<\theta_3\leqq\pi)$$

とおく．

θ_1, θ_2 は

$$t=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\ (1\leqq t<2)$$

から得られる解であるから，

$$\frac{\left(\theta_1+\frac{\pi}{6}\right)+\left(\theta_2+\frac{\pi}{6}\right)}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

$$\theta_1+\theta_2=\frac{2}{3}\pi.$$

したがって，$\theta_1+\theta_2+\theta_3=\dfrac{5}{3}\pi$ であるとき，

$$\theta_3=\pi$$

となり，このとき，

$$2\sin\left(\theta_3+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\frac{7}{6}\pi$$
$$=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$=-1.$$

よって，方程式 $g(t)=a$ の解の1つが $t=-1$ になることから，

$$a=g(-1)$$
$$\boldsymbol{=-3.}$$

(これは $-5\leqq a\leqq -3$ を満たす)

【解説】

(1)(i)　$4\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta-4\cos^2\theta$ を t を用いて表すことを考える．

$$t^2=(\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta)^2$$
$$=3\sin^2\theta+2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$$

であり，

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

三角関数の相互関係

を用いて整理すると，

$$t^2=3(1-\cos^2\theta)+2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta.$$
$$2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta-2\cos^2\theta=t^2-3.$$

よって，

$$4\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta-4\cos^2\theta$$
$$=2(2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta-2\cos^2\theta)$$
$$=2(t^2-3).$$

これを $f(\theta)$ の式に代入することで，

$$f(\theta)=2(t^2-3)-t$$
$$=2t^2-t-6$$

となる．

(ii)　まず，

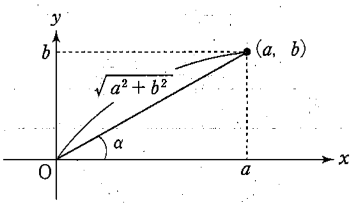
$(a,\ b)\neq(0,\ 0)$ のとき，

$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha).$

ただし，α は，

$$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

を満たす角である

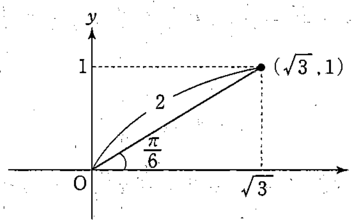


三角関数の合成

を用いて，$t=\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$ を

$$t=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$$

と変形した．



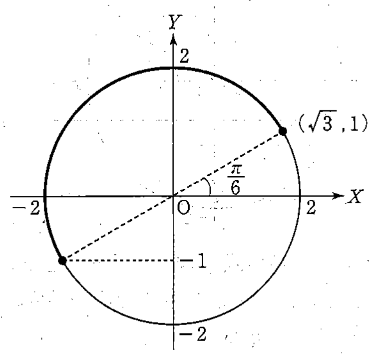
次に，$2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$ のとり得る値の範囲を調べる．

θ が $0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲を動くとき，$\theta+\frac{\pi}{6}$ は

$$\frac{\pi}{6}\leqq\theta+\frac{\pi}{6}\leqq\frac{7}{6}\pi$$

の範囲を動くから，

点 $\left(2\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right),\ 2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\right)$ は，次図の円周上の太線部分を動く．



したがって，$2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$ のとり得る値の範囲は，

$$2\sin\frac{7}{6}\pi\leqq2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\leqq2,$$

すなわち，

$$-1\leqq2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\leqq2.$$

よって，求める t のとり得る値の範囲は

$$-1\leqq t\leqq2$$

となる．

(2)(i)　θ の方程式 $f(\theta)=a$ を，t の2次方程式

$$2t^2-t-6=a \qquad \cdots(*)$$

に帰着して考えるために，まず，与えられた実数 t の値に対して，

$$t=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right),\ 0\leqq\theta\leqq\pi \qquad \cdots(**)$$

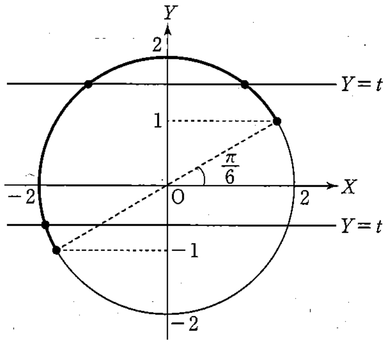
を満たす θ の個数を求めた．

θ が $0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲を動くとき，

点 $\left(2\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right),\ 2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\right)$ は，次図の円周上の太線部分を動くから，

$1 \leqq t < 2$ のとき，
(**) を満たす θ の個数は 2 個，
$-1 \leqq t < 1$，$t=2$ のとき，
(**) を満たす θ の個数は 1 個，
$t < -1$，$2 < t$ のとき，
(**) を満たす θ の個数は 0 個 …(★)

となる．



(★)より，方程式 $f(\theta)=a$ が $0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲に異なる 3 つの解をもつための条件は，t の 2 次方程式 (*) の解が，

「$1 \leqq t < 2$ の範囲に 1 つあり」
かつ
「$-1 \leqq t < 1$ または $t=2$ の範囲に 1 つある」

ことであることがわかる．

【解答】では，このあと，$g(t)=2t^2-t-6$ とおき，方程式 $g(t)=a$ の実数解と，放物線 $y=g(t)$ と直線 $y=a$ の共有点の t 座標が一致することに着目して，a の範囲を求めた．

次のように，t の 2 次方程式を直接解いて，a の範囲を求めることもできる．

((2)(i) の部分的別解)

t の 2 次方程式 $2t^2-t-6=a$ は，

$$2t^2-t-6-a=0 \quad \cdots(\#)$$

と変形できる．この方程式の解が

「$1 \leqq t < 2$ の範囲に 1 つあり」
かつ
「$-1 \leqq t < 1$ または $t=2$ の範囲に 1 つある」

ためには (#) が異なる 2 つの実数解をもつことが必要であり，この条件は，

$$(\text{判別式})=(-1)^2-4\cdot2\cdot(-6-a)>0.$$

$$a > -\frac{49}{8}.$$

この条件のもとで (#) を解くと，

$$t=\frac{1 \pm \sqrt{49+8a}}{4}.$$

2 解のうち，小さい方の解は $t < \frac{1}{4}$ の範囲にあることに着目すると，求める条件は

$$-1 \leqq \frac{1-\sqrt{49+8a}}{4} < 1 \text{ かつ } 1 \leqq \frac{1+\sqrt{49+8a}}{4} < 2$$

となる．

これより，

$$-3 < \sqrt{49+8a} \leqq 5 \text{ かつ } 3 \leqq \sqrt{49+8a} < 7.$$

$$3 \leqq \sqrt{49+8a} \leqq 5.$$

$$9 \leqq 49+8a \leqq 25.$$

$$-5 \leqq a \leqq -3.$$

$$\left(\text{これは } a > -\frac{49}{8} \text{ を満たす}\right)$$

((2)(i) の部分的別解終り)

(ii) a が (i) で求めた範囲にあるとき，θ の方程式 $f(\theta)=a$ の 3 つの解を

$$\theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3 \quad (0 \leqq \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 \leqq \pi),$$

t の方程式 $g(t)=a$ の 2 つの解を

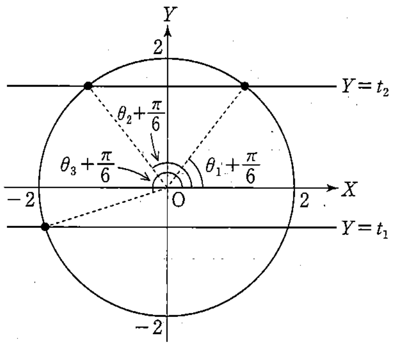
$$t_1,\ t_2 \quad (t_1 < t_2)$$

とおくと，

$$t_1=2\sin\left(\theta_3+\frac{\pi}{6}\right), \quad \cdots①$$

$$t_2=2\sin\left(\theta_1+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(\theta_2+\frac{\pi}{6}\right) \quad \cdots②$$

が成り立つ．



②より，

$$\frac{\left(\theta_1+\frac{\pi}{6}\right)+\left(\theta_2+\frac{\pi}{6}\right)}{2}=\frac{\pi}{2}$$

$$\left(\theta_2+\frac{\pi}{6}=\pi-\left(\theta_1+\frac{\pi}{6}\right) \text{ と考えてもよい}\right)$$

であるから，

$$\theta_1+\theta_2=\frac{2}{3}\pi.$$

よって，$\theta_1+\theta_2+\theta_3=\frac{5}{3}\pi$ であるとき，$\theta_3=\pi$ となる．

このとき，①より，

$$t_1 = 2\sin\frac{7}{6}\pi = -1$$

であることがわかる．

あとは，$a = g(t_1)$ すなわち，$a = g(-1)$ となることを用いて a の値を求め，求めた a の値が(i)で求めた a の範囲に含まれていること（あるいは，$1 \leqq t_2 < 2$ であること）を確認すればよい．

なお，$a = -3$ のとき，方程式 $g(t) = a$ の解は，$t = -1,\ \frac{3}{2}$ となる．

4　2次関数

【Ⅱ型数学Ⅰ，A，Ⅱ　選択問題】

（配点　50点）

a を1より大きい定数とする．平面上に長方形 ABCD があり，

$$\mathrm{AB} = \mathrm{CD} = 1,\ \mathrm{BC} = \mathrm{DA} = a$$

とする．辺 AB, BC, CD, DA 上にそれぞれ点 P, Q, R, S を，

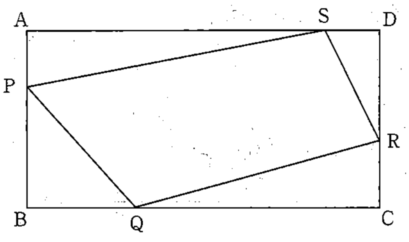
$$\mathrm{AP} = \mathrm{DS} = x,\ \mathrm{BQ} = \mathrm{RD} = 2x\ \left(0 < x \leqq \frac{1}{2}\right)$$

を満たすようにとる．このとき，四角形 PQRS の面積を $f(x)$ とする．

(1)　三角形 APS, PBQ, QCR, RDS の面積をそれぞれ求めよ．

(2)　$f(x)$ を求めよ．

(3)　x が $0 < x \leqq \frac{1}{2}$ の範囲を動くとき，$f(x)$ の最大値を a を用いて表せ．



【配点】

(1)　16 点．

(2)　10 点．

(3)　24 点．

【出題のねらい】

四角形 PQRS の面積を与えられた変数 x を用いて表し，その最大値を a の値によって場合分けをして求められるかをみる問題である．

【解答】　Ⅰ型 $\boxed{2}$【解答】参照．

【解説】　Ⅰ型 $\boxed{2}$【解説】参照．

5　微分法

【Ⅱ型共通　選択問題】

（配点　50点）

a を実数とし，

$$f(x) = x^3 + (2-a)x^2 + (2-a)x - a^2 - 2a$$

とする．O を原点とする xy 平面上の曲線 $y = f(x)$ を C とし，C 上の点 $\mathrm{P}(-1,\ f(-1))$ における接線を l とする．

(1)　l の方程式を求めよ．

(2)　$f(x)$ が極値をもたないような a の値の範囲を求めよ．

(3)　a が次の条件を満たして動くものとする．

（条件）$f(x)$ が極値をもたず，かつ C と l が P と異なる共有点をもつ．

C と l の共有点のうち，P と異なる点を Q とする．三角形 OPQ の面積の最大値と，最大値を与える a の値を求めよ．

【配点】

(1)　14 点．

(2)　12 点．

(3)　24 点．

【出題のねらい】

3次関数のグラフの接線の方程式が正しく求められるか，極値に関する条件について理解できているか，また，絶対値記号を含む関数の最大値を調べることができるかをみる問題である．

【解答】

(1)　$f(x) = x^3 + (2-a)x^2 + (2-a)x - a^2 - 2a$

より，

$$f'(x) = 3x^2 + 2(2-a)x + 2 - a.$$

曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(-1,\ f(-1))$ における接線 l の方程式は，

$$\begin{aligned} y &= f'(-1)(x+1) + f(-1) \\ &= (a+1)(x+1) - a^2 - 2a - 1 \end{aligned}$$

より，

$$\boldsymbol{y=(a+1)x-a^2-a.}$$

(2) $f(x)$ が極値をもたない条件は,

「$f'(x)$ の符号が変化しない」,

すなわち,

「$f'(x)=0$ が異なる2つの実数解をもたない」

である.

この条件は, $f'(x)=0$ の判別式を D とすると,

$$\frac{D}{4}=(2-a)^2-3(2-a)\leqq 0.$$

$$(a-2)(a+1)\leqq 0.$$

$$-1\leqq a\leqq 2.$$

よって, 求める a の値の範囲は,

$$\boldsymbol{-1\leqq a\leqq 2.}$$

(3) C, l の方程式から y を消去すると,

$$x^3+(2-a)x^2+(2-a)x-a^2-2a=(a+1)x-a^2-a.$$

$$x^3+(2-a)x^2+(1-2a)x-a=0.$$

$$(x+1)^2(x-a)=0.$$

$$x=-1,\ a.$$

これが C と l の共有点の x 座標にほかならない.

C と l が P と異なる共有点をもつとき, $a\neq -1$ であり, (2) とあわせて, a のとり得る値の範囲は,

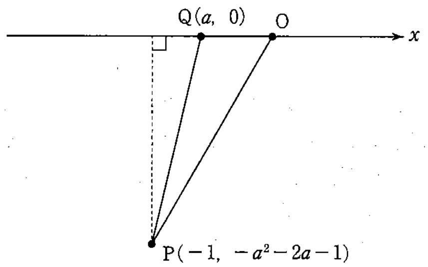
$$-1<a\leqq 2.$$

また, C と l の共有点のうち, P と異なる点が Q であるから, Q の x 座標は a である. これを l の方程式に代入すると, Q の y 座標は,

$$y=(a+1)\cdot a-a^2-a=0.$$

したがって,

$$\mathrm{Q}(a,\ 0).$$



三角形 OPQ の面積を $S(a)$ とすると, O, Q はいずれも x 軸上の点であるから,

$$S(a)=\frac{1}{2}\mathrm{OQ}\cdot|(\text{P の } y \text{ 座標})|$$

$$=\frac{1}{2}|a|\cdot|-a^2-2a-1|$$

$$=\frac{1}{2}|a|\cdot|-(a+1)^2|$$

$$=\frac{1}{2}(a+1)^2\cdot|a|.$$

(i) $-1<a<0$ のとき.

$$S(a)=\frac{1}{2}(a+1)^2\cdot(-a)$$

$$=-\frac{1}{2}(a^3+2a^2+a).$$

$$S'(a)=-\frac{1}{2}(3a^2+4a+1)$$

$$=-\frac{1}{2}(3a+1)(a+1).$$

(ii) $0\leqq a\leqq 2$ のとき.

$$S(a)=\frac{1}{2}(a+1)^2\cdot a$$

$$=\frac{1}{2}(a^3+2a^2+a).$$

$0<a<2$ において,

$$S'(a)=\frac{1}{2}(3a^2+4a+1)$$

$$=\frac{1}{2}(3a+1)(a+1).$$

(i), (ii) より, $-1<a\leqq 2$ における $S(a)$ の増減は次表のようになる.

a	(-1)	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$S'(a)$		$+$	0	$-$		$+$	
$S(a)$	(0)	↗	$\frac{2}{27}$	↘	0	↗	9

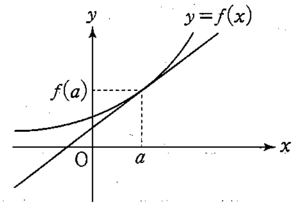
したがって, 三角形 OPQ の面積 $S(a)$ は

$a=2$ のとき　最大値 $S(2)=9$

をとる.

【解説】

(1) 曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(-1,\ f(-1))$ における接線 l の方程式を求めるには,



曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の傾きは $f'(a)$ であるから, 接線の方程式は,

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

接線の方程式

を用いればよい.

(2) 極値については,

> $f'(x)$ の符号が，$x=a$ の前後で
> 正から負に変わるとき $f(a)$ は極大値，
> 負から正に変わるとき $f(a)$ は極小値
>
> **関数の極大・極小**

となる．このことから，$f(x)$ が極値をもたない条件は，

「$f'(x)$ の符号が変化しない」　…(*)

である．

$$f'(x)=3x^2+2(2-a)x+2-a$$

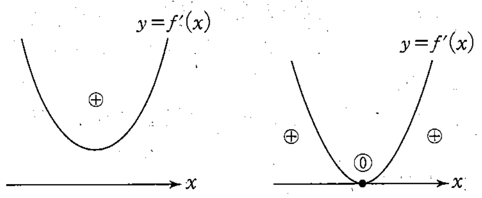
より，(*) は，

「放物線 $y=f'(x)$ が x 軸と交わらない，または x 軸と接する」，

すなわち，

「2次方程式 $f'(x)=0$ が実数解をもたない，または実数の重解をもつ」

と同値である．



あとは，

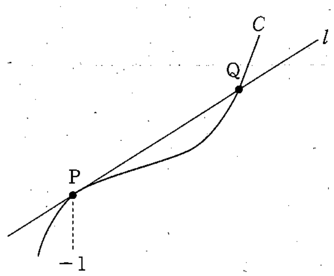
> 実数を係数とする x の2次方程式
> $$ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq0)$$
> が実数解をもたない，または実数の重解をもつ条件は，判別式を D として，
> $$D=b^2-4ac\leqq0.$$
> とくに，$b=2b'$ のときは，
> $$\frac{D}{4}=(b')^2-ac\leqq0$$
>
> **2次方程式の判別式**

を用いて，a の値の範囲を求めればよい．

(3)　C，l の方程式から y を消去すると，

$$x^3+(2-a)x^2+(1-2a)x-a=0 \quad \cdots(**)$$

が得られる．



C と l は x 座標が -1 である点 P で接しているのであるから，

> $f(x)$ を整式とするとき，
> 「曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=px+q$ は点 $(\alpha,\ f(\alpha))$ で接する」
> $\iff$「方程式 $f(x)-(px+q)=0$ は $x=\alpha$ を重解にもつ」
> $\iff$「整式 $f(x)-(px+q)$ は $(x-\alpha)^2$ で割り切れる」
>
> **曲線の接線と方程式の重解**

に注目すると，(**) は $x=-1$ を重解にもつ，すなわち，(**) の左辺は $(x+1)^2$ で割り切れる．

これより，(**) を

$$(x+1)^2(x-a)=0$$

と変形し，Q の x 座標を求めればよい．

また，

> x の3次方程式
> $$ax^3+bx^2+cx+d=0 \quad (a\neq0)$$
> の3つの解を α，β，γ とすると，
> $$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a},\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a},\\ \alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a}\end{cases}$$
>
> **3次方程式の解と係数の関係**

を用いて，次のようにして Q の x 座標を求めることもできる．

(Q の x 座標を求める別解)

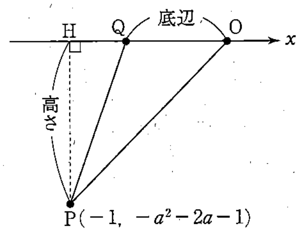
Q の x 座標を $\alpha(\neq-1)$ とおくと，(**) の解は，α，-1(重解)であり，3次方程式の解と係数の関係より，

$$\alpha+(-1)+(-1)=-(2-a).$$

$$\alpha=a.$$

(Q の x 座標を求める別解終り)

Q$(a,\ 0)$ とわかったあとは，2点 O，Q がいずれも x 軸上にあることから，三角形 OPQ の底辺を OQ，高さを「P と x 軸との距離」と考えることができる．



P から x 軸に下ろした垂線の足を H とおくと，

$\mathrm{OQ}=|a|$　(底辺),

$\mathrm{PH}=|-a^2-2a-1|$　(高さ)

のように，OQ，PH は絶対値記号を用いて表される．**【解答】**では，

$$|-a^2-2a-1|=|-(a+1)^2|=(a+1)^2$$

と変形し，

$$S(a)=\frac{1}{2}(a+1)^2\cdot|a|$$

を得たあと，a の符号で場合分けをして $S(a)$ の増減を調べた．

また，次のように考えてもよい．

($S(a)$ の最大値を求める別解 1)

$$S(a)=\frac{1}{2}\mathrm{OQ}\cdot\mathrm{PH}$$
$$=\frac{1}{2}|a|\cdot|-a^2-2a-1|$$
$$=\frac{1}{2}|-a^3-2a^2-a|.$$

ここで，

$$g(a)=-a^3-2a^2-a$$

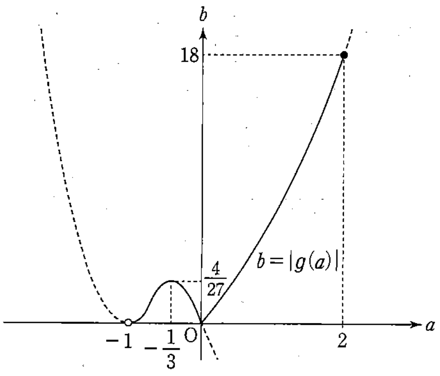
とおくと，

$$g'(a)=-3a^2-4a-1$$
$$=-(3a+1)(a+1)$$

より，$g(a)$ の $-1<a\leqq 2$ における増減は次表のようになる．

a	(-1)	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	2
$g'(a)$		$+$	0	$-$	
$g(a)$	(0)	↗	$\frac{4}{27}$	↘	-18

したがって，$-1<a\leqq 2$ における $b=|g(a)|$ のグラフは次図のようになる．



$S(a)=\frac{1}{2}|g(a)|$ であるから，$S(a)$ が最大となるのは $|g(a)|$ が最大となるときである．

よって，$a=2$ のとき $S(a)$ は最大となり，最大値は，

$$S(2)=\frac{1}{2}|g(2)|$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 18$$
$$=9.$$

($S(a)$ の最大値を求める別解 1 終り)

($S(a)$ の最大値を求める別解 2)

$-1<a\leqq 2$ において，

$$0<(a+1)^2\leqq(2+1)^2=9,\quad |a|\leqq 2.$$

(いずれも等号成立は $a=2$ のとき)

したがって，

$$S(a)=\frac{1}{2}(a+1)^2\cdot|a|\leqq\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 2=9.$$

(等号成立は $a=2$ のとき)

よって，三角形 OPQ の面積 $S(a)$ は

$a=2$ のとき　最大値 $S(2)=9$

をとる．

($S(a)$ の最大値を求める別解 2 終り)

6　平面ベクトル

【Ⅱ型数学Ⅰ，A，Ⅱ，B　選択問題】

(配点　50点)

平面上に $\mathrm{OA}=8$, $\mathrm{OB}=5$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=24$ である三角形 OAB がある．辺 OA を $3:1$ に内分する点を C，辺 OB を $2:1$ に内分する点を D とし，2 直線 AD，BC の交点を E とする．また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおく．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2)　E から直線 OA に下ろした垂線の足を H とする．$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$ を用いて表せ．また，EH の長さを求めよ．

(3)　点 P が線分 BE を直径とする円周上を動くとき，三角形 OAP の面積が最大となるときの P を $\mathrm{P_0}$ とする．$\overrightarrow{\mathrm{OP_0}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

【配点】

(1)　14 点.

(2)　20 点.

(3)　16 点.

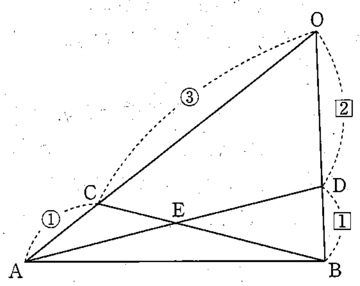
【出題のねらい】

ベクトルの基本性質の理解をもとにして，交点の位

置の把握，垂直条件の処理など，図形問題に有向線分を活用する力があるかをみる問題である．

【解答】

(1)



$$\mathrm{OC}:\mathrm{CA}=3:1,\ \mathrm{OD}:\mathrm{DB}=2:1$$

より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{3}{4}\vec{a},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{2}{3}\vec{b}.$$

E は直線 AD 上にあるから，実数 s を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=s\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

と表せる．したがって，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OE}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AD}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s(\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\\&=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OD}}\\&=(1-s)\vec{a}+\frac{2s}{3}\vec{b}.\end{aligned}\qquad\cdots①$$

一方，E は直線 BC 上にあるから，実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{BE}}=t\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

と表せる．したがって，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OE}}&=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BE}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{BC}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})\\&=t\overrightarrow{\mathrm{OC}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\&=\frac{3t}{4}\vec{a}+(1-t)\vec{b}.\end{aligned}\qquad\cdots②$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は1次独立であるから，①，② より，

$$\begin{cases}1-s=\dfrac{3t}{4},\\[2mm]\dfrac{2s}{3}=1-t.\end{cases}$$

これを解くと，

$$s=\frac{1}{2},\ t=\frac{2}{3}.$$

$s=\frac{1}{2}$ を ① に代入して，

$$\overrightarrow{\mathbf{OE}}=\frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{a}}+\frac{1}{3}\vec{\boldsymbol{b}}.$$

(2) 条件より，

$$|\vec{a}|=8,\quad |\vec{b}|=5,\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=24.\qquad\cdots③$$

H は直線 OA 上にあるから，実数 u を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=u\overrightarrow{\mathrm{OA}}=u\vec{a}$$

と表せる．

一方，$\overrightarrow{\mathrm{EH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{EH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0.\qquad\cdots④$$

(1) および ③ を用いると，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{EH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}&=(\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OE}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\&=\left\{u\vec{a}-\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\right)\right\}\cdot\vec{a}\\&=\left(u-\frac{1}{2}\right)|\vec{a}|^2-\frac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}\\&=64\left(u-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}\cdot24\\&=64u-40.\end{aligned}$$

したがって，④ より，

$$64u-40=0.$$

$$u=\frac{5}{8}.$$

よって，

$$\overrightarrow{\mathbf{OH}}=\frac{5}{8}\vec{\boldsymbol{a}}.$$

このとき，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{EH}}&=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OE}}\\&=\frac{5}{8}\vec{a}-\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\right)\\&=\frac{1}{8}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}.\end{aligned}\qquad\cdots⑤$$

③ を用いると，

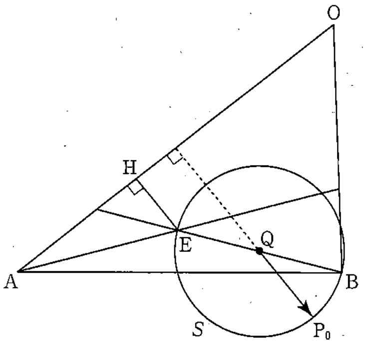
$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{EH}}|^2&=\left|\frac{1}{8}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}\right|^2\\&=\frac{1}{64}|\vec{a}|^2-\frac{1}{12}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{9}|\vec{b}|^2\\&=\frac{1}{64}\cdot64-\frac{1}{12}\cdot24+\frac{1}{9}\cdot25\\&=\frac{16}{9}.\end{aligned}$$

よって，

$$\mathrm{EH}=\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}.$$

(3) 線分 BE の中点を Q とすると，Q は線分 BE を直径とする円 S の中心であり，P は S 上を動く．

三角形 OAP の面積が最大となるのは，直線 OA と P との距離が最大となるときであり，このとき $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ は $-\overrightarrow{\mathrm{EH}}$ と同じ向きである．



(1) および ③ を用いると,

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{BE}|^2&=|\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OB}|^2\\&=\left|\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\right)-\vec{b}\right|^2\\&=\left|\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}\right|^2\\&=\frac{1}{4}|\vec{a}|^2-\frac{2}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{4}{9}|\vec{b}|^2\\&=\frac{1}{4}\cdot64-\frac{2}{3}\cdot24+\frac{4}{9}\cdot25\\&=\frac{100}{9}.\end{aligned}$$

したがって, $|\overrightarrow{BE}|=\frac{10}{3}$ であり,

$$BQ=\frac{1}{2}BE=\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{3}=\frac{5}{3}.$$

これが円 S の半径にほかならない.

よって, ⑤ より,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{QP_0}&=\frac{BQ}{EH}(-\overrightarrow{EH})\\&=\frac{\frac{5}{3}}{\frac{4}{3}}\left(-\frac{1}{8}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\right)\\&=\frac{5}{4}\left(-\frac{1}{8}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\right)\\&=-\frac{5}{32}\vec{a}+\frac{5}{12}\vec{b}.\end{aligned}$$

これより,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathbf{OP_0}}&=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QP_0}\\&=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OE})+\overrightarrow{QP_0}\\&=\frac{1}{2}\left(\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\right)-\frac{5}{32}\vec{a}+\frac{5}{12}\vec{b}\\&=\boldsymbol{\frac{3}{32}\vec{a}+\frac{13}{12}\vec{b}}.\end{aligned}$$

【解説】

(1)　2 直線の交点として定まる点 E の位置ベクトルを求めるには,

> 「点 P が直線 AB 上にある」
> $\Longleftrightarrow$ 「$\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AB}$ を満たす実数 k が存在する」
>
> **点が定直線上にある条件**

に注意して, E が直線 AD 上にある条件, 直線 BC 上にある条件をそれぞれ立式すればよい. これらの条件 ①, ② を得たあと,

> 平面ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が,
> $$\vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\neq\vec{0},\ \vec{a}\not\parallel\vec{b}$$
> を満たすとき, $\vec{a}$, $\vec{b}$ は 1 次独立であるという.
> 　$\vec{a}$, $\vec{b}$ が 1 次独立であるとき, 実数 x, y, p, q に対し,
> $$x\vec{a}+y\vec{b}=p\vec{a}+q\vec{b}$$
> $$\Longleftrightarrow\ x=p \text{ かつ } y=q$$
>
> **平面ベクトルの 1 次独立**

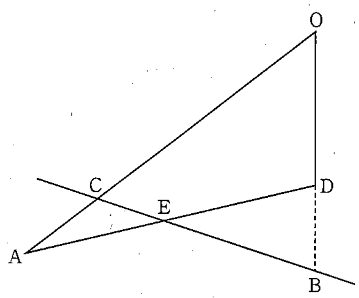
を用いて $\overrightarrow{OE}$ を表す 2 つの式の「係数比較」をすることで

$$\begin{cases}1-s=\dfrac{3t}{4},\\ \dfrac{2s}{3}=1-t\end{cases}$$

を得る. あとはこの連立方程式を解けばよい.

　また, ベクトルを用いず, メネラウスの定理を用いて解くこともできる.

((1) の別解)



　三角形 OAD と直線 BC に対し, メネラウスの定理を用いると,

$$\frac{AC}{CO}\cdot\frac{OB}{BD}\cdot\frac{DE}{EA}=1.$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{DE}{EA}=1.$$

$$\frac{DE}{EA}=1.$$

したがって，

$$AE=ED.$$

よって，E は線分 AD の中点であるから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OE}&=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD})\\&=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right)\\&=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}.\end{aligned}$$

((1) の別解終り)

(2) ベクトルを用いて垂直条件を表すには，

> $\vec{a}$，$\vec{b}$ がともに $\vec{0}$ でないとき，
>
> $\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0$
>
> **垂直条件**

を用いるとよい．

本問では，$\overrightarrow{EH}\perp\overrightarrow{OA}$ であるから $\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{OA}=0$ とした．

また，$|\overrightarrow{EH}|^2$ を計算する際には，

> $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$
>
> $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$
>
> $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$
>
> $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$ (k は実数)
>
> **内積の計算法則**

を用いればよい．

(3) 三角形 OAP において辺 OA は動かないから，辺 OA を底辺とみれば，直線 OA と点 P の距離が高さとなる．したがって，面積が最大となるのは P が直線 OA から最も遠ざかったときである．

P は線分 BE の中点 Q を中心とする円周上を動くから，P が直線 OA から最も遠ざかるのは，P から直線 OA に下ろした垂線の足と P を結ぶ線分が Q を通るときである．

ここで，(2) において E から OA に垂線を下ろしていたことに注目すると，$\overrightarrow{QP_0}$ の向きは，(2) の $\overrightarrow{EH}$ の向きと反対であることがわかる．

さらに，**【解答】**では，$\overrightarrow{QP_0}$ の大きさを $\frac{1}{2}$BE として捉え，$|\overrightarrow{BE}|^2$ を計算することで $\overrightarrow{QP_0}$ の大きさを求めた．

【Ⅲ型受験者用】

1 小問集合

【Ⅲ型　必須問題】

(配点　40点)

> (1) $0<x<\frac{\pi}{2}$ のとき，x の不等式
>
> $\left(\tan x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)(\tan x-\sqrt{3})<0$ を解け．
>
> (2) x の方程式 $\log_2(x+1)=\log_4(2-x)+1$ を解け．
>
> (3) 自然数 n に対して，n^2+n^3 が 3 で割り切れないとき，n を 3 で割った余りを求めよ．
>
> (4) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}<\frac{9}{10}$ を満たす最大の自然数 n の値を求めよ．
>
> (5) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$ の和を求めよ．

【配点】

(1) 8 点．

(2) 8 点．

(3) 8 点．

(4) 8 点．

(5) 8 点．

【出題のねらい】

(1) 三角関数を含む不等式を正しく解けるかをみる問題である．

(2) 対数方程式を正しく解けるかをみる問題である．

(3) 整数を 3 で割ったときの余りで分類して考察ができるかをみる問題である．

(4) 部分分数に分解して数列の和を求められるかをみる問題である．

(5) 無限等比級数の和を正しく求められるかをみる問題である．

【解答】

(1) $\left(\tan x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)(\tan x-\sqrt{3})<0$ より，

$$\frac{1}{\sqrt{3}}<\tan x<\sqrt{3}.$$

$0<x<\frac{\pi}{2}$ の範囲で，

$\tan x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ を満たす x の値は $x=\frac{\pi}{6}$，

$\tan x=\sqrt{3}$ を満たす x の値は $x=\dfrac{\pi}{3}$.

よって，求める解は,

$$\boldsymbol{\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{3}}.$$

(2)
$$\log_2(x+1)=\log_4(2-x)+1. \quad \cdots①$$

① において，(真数) > 0 であるから,

$$x+1>0 \quad \text{かつ} \quad 2-x>0.$$

$$-1<x<2. \quad \cdots②$$

このとき，① を変形すると,

$$\log_2(x+1)=\frac{\log_2(2-x)}{\log_2 4}+1.$$

$$\log_2(x+1)=\frac{\log_2(2-x)}{2}+1.$$

$$2\log_2(x+1)=\log_2(2-x)+2.$$

$$\log_2(x+1)^2=\log_2 4(2-x).$$

$$(x+1)^2=4(2-x).$$

$$x^2+6x-7=0.$$

$$(x+7)(x-1)=0.$$

$$x=-7,\ 1.$$

これと ② より,

$$\boldsymbol{x=1}.$$

(3) $I=n^2+n^3$ とおく.

n を 3 で割った余りを r とすると，r は 0, 1, 2 のいずれかである.

(i) $r=0$ のとき.

$n=3k$ (k は整数) とおけ,

$I=(3k)^2+(3k)^3=3(9k^3+3k^2)$.

このとき I は 3 で割り切れる.

(ii) $r=1$ のとき.

$n=3k+1$ (k は整数) とおけ,

$$\begin{aligned} I&=(3k+1)^2+(3k+1)^3 \\ &=(9k^2+6k+1)+(27k^3+27k^2+9k+1) \\ &=3(9k^3+12k^2+5k)+2. \end{aligned}$$

このとき I は 3 で割り切れない.

(iii) $r=2$ のとき.

$n=3k+2$ (k は整数) とおけ,

$$\begin{aligned} I&=(3k+2)^2+(3k+2)^3 \\ &=(9k^2+12k+4)+(27k^3+54k^2+36k+8) \\ &=3(9k^3+21k^2+16k+4). \end{aligned}$$

このとき I は 3 で割り切れる.

(i), (ii), (iii) より，求める余りは,

$$\mathbf{1}.$$

(4)
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) \\ &=1-\frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

したがって,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}<\frac{9}{10}$$

を変形すると,

$$1-\frac{1}{n+1}<\frac{9}{10}.$$

$$\frac{1}{10}<\frac{1}{n+1}.$$

$$n+1<10.$$

$$n<9.$$

これを満たす最大の自然数 n の値は,

$$\boldsymbol{n=8}.$$

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$ は初項 $\dfrac{1}{4}$，公比 $\dfrac{1}{4}$ の無限等比級数である.

$-1<$(公比)<1 より，この無限等比級数は収束し，その和は,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n&=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} \\ &=\boldsymbol{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

【解説】

(1)
$$\left(\tan x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)(\tan x-\sqrt{3})<0 \quad \cdots③$$

において，$t=\tan x$ とおくと,

$$\left(t-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)(t-\sqrt{3})<0.$$

これは t の 2 次不等式であり，これを解くと,

$$\frac{1}{\sqrt{3}}<t<\sqrt{3}.$$

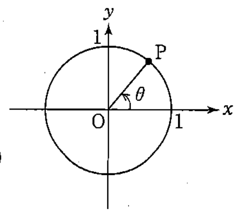
したがって，③ は

$$\frac{1}{\sqrt{3}}<\tan x<\sqrt{3} \quad \cdots④$$

となる.

単位円上の点 P に対して，動径 OP の表す角が θ のとき,

$\tan\theta$
=(直線 OP の傾き)



tan の定義

に従うと，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲では,

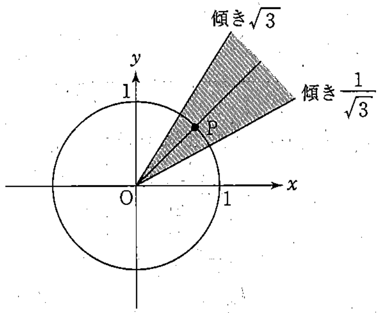
$\tan x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を満たす x の値は $x=\dfrac{\pi}{6}$,

$\tan x=\sqrt{3}$ を満たす x の値は $x=\dfrac{\pi}{3}$

であるから，④を解くと，

$$\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{3}$$

となる.



(2) 対数関数を含む方程式を解く際には，まず始めに

$$(\text{真数})>0$$

であることに注意しなければならない.

次に，【解答】では，

> $a>0$, $b>0$, $c>0$, $a\neq1$, $c\neq1$ のとき，
> $$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$$
> **底の変換公式**

を用いて

$$\log_4(2-x)=\frac{\log_2(2-x)}{\log_2 4}=\frac{\log_2(2-x)}{2}$$

とし，

> $a>0$，$a\neq1$，$M>0$，$N>0$ で k を実数とするとき，
> $$\log_a MN=\log_a M+\log_a N$$
> $$\log_a M^k=k\log_a M$$
> **対数の性質 1**

を用いて，与えられた方程式を

$$\log_2(x+1)^2=\log_2 4(2-x)$$

と変形した.

あとは，

> $a>0$，$a\neq1$，$A>0$，$B>0$ のとき，
> $$\log_a A=\log_a B \iff A=B$$
> **対数の性質 2**

を用いて

$$(x+1)^2=4(2-x)$$

とし，この方程式を解けばよい.

(3) n を 3 で割ったときの余りで分類して考えるのが基本である.

【解答】では，

$$n=3k,\ n=3k+1,\ n=3k+2\ (k\text{ は整数})$$

の 3 つの場合に分けて，それぞれの場合ごとに直接 n^2+n^3 に代入して，3 で割り切れるかどうかを調べた.

また，n^2+n^3 を因数分解して，各因数が 3 で割り切れるかどうかを調べて解くこともできる.

((3) の別解)

$I=n^2+n^3$ とおくと，

$$I=n^2(n+1).$$

n を 3 で割った余りを r とすると，r は 0, 1, 2 のいずれかである.

(i) $r=0$ のとき.

n は 3 で割り切れるから，I は 3 で割り切れる.

(ii) $r=1$ のとき.

$n=3k+1$ (k は整数) とおけ，

$$n=3k+1,\ n+1=3k+2$$

はいずれも 3 で割り切れないから，I は 3 で割り切れない.

(iii) $r=2$ のとき.

$n=3k+2$ (k は整数) とおけ，

$$n+1=3(k+1)$$

は 3 で割り切れるから，I は 3 で割り切れる.

(i), (ii), (iii) より，求める余りは，

$$1.$$

((3) の別解終り)

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$ を n の式で表すには，$\dfrac{1}{k(k+1)}$ を部分分数に分解して，

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

とするとよい.

この式に $k=1, 2, \cdots, n$ を代入して辺々加えると，

$$\frac{1}{1\cdot2}=\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}$$
$$\frac{1}{2\cdot3}=\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}$$
$$\frac{1}{3\cdot4}=\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}$$
$$\vdots$$
$$+\Big)\ \frac{1}{n(n+1)}=\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}$$
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}$$

となり，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$ を n の式で表すことができる．

あとは

$$1-\frac{1}{n+1}<\frac{9}{10}$$

を満たす自然数 n を考えればよい．

(5) $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots$$

であるから，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$ は無限等比級数である．

この無限等比級数の初項は $\frac{1}{4}$，公比は $\frac{1}{4}$ であるから，

> 初項 a，公比 $r\,(-1<r<1)$ の無限等比級数について
>
> $$\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}=\frac{a}{1-r}$$
>
> **無限等比級数の和**

を用いればよい．

2 平面ベクトル

【Ⅲ型　必須問題】

(配点　40点)

> 平面上に三角形 OAB があり，辺 OA を 7:2 に内分する点を C，辺 OB を 1:4 に内分する点を D，辺 AB の中点を M とする．さらに，直線 AD と直線 CM の交点を P とする．
>
> (1) $\overrightarrow{OM}$ を $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ．
>
> (2) $\overrightarrow{OP}$ を $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ．
>
> (3) $OA=2\sqrt{5}$，$OB=5$，$AB=3$ とする．
>
> (i) 内積 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ の値を求めよ．
>
> (ii) 三角形 APM の面積を求めよ．

【配点】

(1) 4 点．

(2) 14 点．

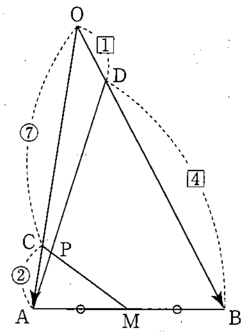
(3) 22 点．

(i) 8 点．(ii) 14 点．

【出題のねらい】

点が直線上にあることをベクトルを用いて正しく表現できるか，2 直線の交点の位置ベクトルを 2 つの基本となるベクトルで表すことができるかなどをみる問題である．

【解答】



(1) M は辺 AB の中点であるから，

$$\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}.$$

(2) P は直線 AD 上の点であるから，実数 s を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}&=\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AD}\\&=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OD}\\&=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\left(\frac{1}{5}\overrightarrow{OB}\right)\\&=(1-s)\overrightarrow{OA}+\frac{1}{5}s\overrightarrow{OB}\qquad\cdots①\end{aligned}$$

と表せる．

また，P は直線 CM 上の点であるから，実数 t を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}&=\overrightarrow{OC}+t\overrightarrow{CM}\\&=(1-t)\overrightarrow{OC}+t\overrightarrow{OM}\qquad\cdots②\\&=(1-t)\left(\frac{7}{9}\overrightarrow{OA}\right)+t\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)\\&=\left(\frac{7}{9}-\frac{5}{18}t\right)\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}t\overrightarrow{OB}\qquad\cdots③\end{aligned}$$

と表せる．

$\overrightarrow{OA}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{OB}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{OA}\not\parallel\overrightarrow{OB}$ であるから，①，③より，

$$\begin{cases}1-s=\dfrac{7}{9}-\dfrac{5}{18}t,\\[2mm]\dfrac{1}{5}s=\dfrac{1}{2}t.\end{cases}$$

これを解くと，

$$s=\frac{1}{4},\ t=\frac{1}{10}.\qquad\cdots④$$

$s=\frac{1}{4}$ を ① に代入して，

$$\overrightarrow{OP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{20}\overrightarrow{OB}.$$

(3)(i)

$$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|^2$$
$$=|\overrightarrow{OB}|^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OA}|^2$$

であり，

$$|\overrightarrow{OA}|=2\sqrt{5},\ |\overrightarrow{OB}|=5,\ |\overrightarrow{AB}|=3$$

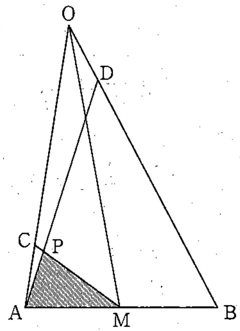
より，

$$9=25-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+20.$$

よって，

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\mathbf{18}.$$

(ii)



④ より，$t=\dfrac{1}{10}$ であるから，② より，

$$\overrightarrow{OP}=\frac{9}{10}\overrightarrow{OC}+\frac{1}{10}\overrightarrow{OM}.$$

これより，

$$\mathrm{CP}:\mathrm{PM}=1:9$$

であるから，

$$\mathrm{PM}:\mathrm{CM}=9:10.$$

したがって，

$$\triangle\mathrm{APM}=\frac{9}{10}\triangle\mathrm{ACM}. \quad \cdots⑤$$

また，OC : CA = 7 : 2 より，

$$\triangle\mathrm{ACM}=\frac{2}{9}\triangle\mathrm{OAM}. \quad \cdots⑥$$

さらに，M は辺 AB の中点であるから，

$$\triangle\mathrm{OAM}=\frac{1}{2}\triangle\mathrm{OAB}. \quad \cdots⑦$$

⑤，⑥，⑦ より，

$$\triangle\mathrm{APM}=\frac{9}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{2}\triangle\mathrm{OAB}$$
$$=\frac{1}{10}\triangle\mathrm{OAB}. \quad \cdots⑧$$

一方，

$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{(2\sqrt{5})^2\cdot5^2-18^2}$$
$$=2\sqrt{11}.$$

これを ⑧ に代入して，

$$\triangle\mathrm{APM}=\frac{1}{10}\cdot2\sqrt{11}$$
$$=\mathbf{\frac{\sqrt{11}}{5}}.$$

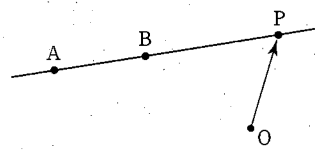
【解説】

(1) M は辺 AB の中点であるから，$\overrightarrow{OM}$ は

> $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ を結ぶ線分 AB の中点の位置ベクトルは
>
> $$\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$$
>
> **中点の位置ベクトル**

に従って求めればよい．

(2) $\overrightarrow{OP}$ を求めるには，P が 2 つの直線 AD，CM の交点であることに注目する．

> 
>
>
> 「P が直線 AB 上の点である」
>
> $\Longleftrightarrow$ 「$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}$ を満たす実数 s が存在する」
>
> **直線上の点の表し方**

を用いると，P は直線 AD 上の点であるから，実数 s を用いて

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AD}$$

と表せる．

これより，

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+s(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA})$$
$$=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OD}$$

と変形でき，OD:DB = 1:4 より，

$$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{5}\overrightarrow{OB}$$

であるから，

$$\overrightarrow{OP}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\left(\frac{1}{5}\overrightarrow{OB}\right)$$
$$=(1-s)\overrightarrow{OA}+\frac{1}{5}s\overrightarrow{OB} \quad \cdots①$$

と表せる．

P は直線 CM 上の点でもあるから，同様に考えて，

$$\overrightarrow{OP}=\left(\frac{7}{9}-\frac{5}{18}t\right)\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}t\overrightarrow{OB} \quad \cdots③$$

と表せる．

次に，

平面上のベクトル $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ が $\overrightarrow{a}\neq\overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{b}\neq\overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{a}\not\parallel\overrightarrow{b}$ を満たすとき,

・平面上の任意のベクトル $\overrightarrow{p}$ は

$$\overrightarrow{p}=s\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}\quad (s,\ t \text{ は実数})$$

の形にただ1通りに表すことができる.

・ただ1通りに表すことができることから,

$$s\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}=s'\overrightarrow{a}+t'\overrightarrow{b}$$
$$\iff\ s=s' \text{ かつ } t=t'$$

ベクトルの分解

に従えば, ①, ③ から,

$$\begin{cases} 1-s=\dfrac{7}{9}-\dfrac{5}{18}t, \\ \dfrac{1}{5}s=\dfrac{1}{2}t \end{cases}$$

を得る. この連立方程式を解くことで,

$$s=\frac{1}{4},\ t=\frac{1}{10}$$

が得られ, $\overrightarrow{OP}$ を $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ を用いて表すことができる.

(3)(i)

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a}$$
$$\overrightarrow{a}\cdot(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}$$
$$(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}+\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}$$
$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}=|\overrightarrow{a}|^2$$

内積の性質

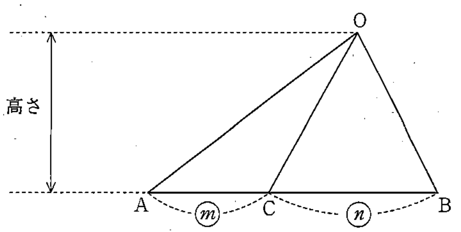
を用いると,

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AB}|^2&=|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|^2\\ &=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\\ &=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\\ &\qquad+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}\\ &=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\\ &\qquad+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}\\ &=|\overrightarrow{OB}|^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OA}|^2\end{aligned}$$

と変形できる.

これに, $|\overrightarrow{OA}|=2\sqrt{5}$, $|\overrightarrow{OB}|=5$, $|\overrightarrow{AB}|=3$ を代入して $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ の値を求めればよい.

(ii)



一般に, 図のような三角形 OAB において, 辺 AB を $m:n$ に内分する点を C とする. 三角形 OAC と三角形 OBC と三角形 OAB は, それぞれ辺 AC, 辺 BC, 辺 AB を底辺とみると, 高さが等しいから, 3つの三角形の面積比は

$$\begin{aligned}\triangle OAC:\triangle OBC:\triangle OAB&=AC:BC:AB\\ &=m:n:(m+n)\end{aligned}$$

となる.

本問においてこれを用いると,

$$\begin{aligned}\triangle APM:\triangle ACM&=PM:CM\\ &=9:10\end{aligned}$$

であるから,

$$\triangle APM=\frac{9}{10}\triangle ACM. \qquad \cdots ⑤$$

同様に考えると,

$$\triangle ACM=\frac{2}{9}\triangle OAM, \qquad \cdots ⑥$$

$$\triangle OAM=\frac{1}{2}\triangle OAB \qquad \cdots ⑦$$

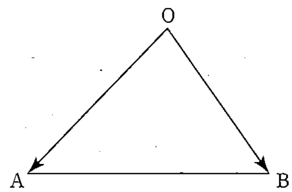
が得られる.

よって, ⑤, ⑥, ⑦ より,

$$\begin{aligned}\triangle APM&=\frac{9}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{2}\triangle OAB\\ &=\frac{1}{10}\triangle OAB\end{aligned}$$

となる.

一方, 三角形 OAB の面積については,



三角形 OAB の面積を S とすると,

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}$$

三角形の面積

を用いて求めることができる.

3 確　率

【Ⅲ型　必須問題】

(配点　40点)

赤球2個と白球2個の合計4個の球と袋およびテーブルがあり, はじめは4個の球がすべて袋の中に入っている. 以下の「操作」を繰り返す.

「操作」

袋から球を1個取り出し, テーブルの上に置

く．その結果，テーブルの上の赤球が2個になったときだけテーブルの上に置いてあるすべての球を袋に戻す．

(1)「操作」を3回繰り返した時点でテーブルの上に球が置かれていない確率を求めよ．
(2)「操作」を4回繰り返した時点でテーブルの上に球が置かれていない確率を求めよ．
(3)「操作」を9回繰り返した時点でテーブルの上に球が置かれていない確率を求めよ．

【配点】

(1) 10点．
(2) 12点．
(3) 18点．

【出題のねらい】

事象を適切に分割し，それぞれの事象に関する確率を正しく求められるかをみる問題である．

【解答】

(1)「操作」を3回繰り返した時点でテーブルの上に球が置かれていないのは，1，2，3回目に袋から取り出した球の色が，

赤白赤　または　白赤赤

となる場合である．

よって，求める確率は，

$$\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{1}{3}}.$$

(2) テーブルの上に置いてあるすべての球を袋に戻すことを「リセット」とよぶことにする．

テーブルの上に球が置かれていない状態から「操作」を繰り返すとき，初めてリセットが起こるのは，

・「操作」を2回繰り返した時点
・「操作」を3回繰り返した時点
・「操作」を4回繰り返した時点

のいずれかである．

したがって，「操作」を4回繰り返した時点でテーブルの上に球が置かれていないのは，次の(i)，(ii)の場合である．

(i) はじめの2回の「操作」の後に1度目のリセットが起こり，次の2回の「操作」の後に2度目のリセットが起こる．

「操作」を2回繰り返した時点でリセットが起こるのは，その2回で袋から取り出した球の色が

赤赤

の場合であり，この確率は，

$$\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

よって，(i)が起こる確率は，

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{36}.$$

(ii) 4回の「操作」の後に初めてリセットが起こる．

(ii)が起こるのは，1，2，3，4回目に袋から取り出した球の色が

赤白白赤，白赤白赤，白白赤赤

のいずれかの場合である．

よって，(ii)が起こる確率は，

$$\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot1+\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot1+\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot1\cdot1=\frac{1}{2}.$$

(i)，(ii)は互いに排反であるから，求める確率は，

$$\frac{1}{36}+\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{19}{36}}.$$

(3) テーブルの上に球が置かれていない状態，すなわち，はじめの状態もしくはリセットが起こった直後から「操作」を繰り返すとき，3つの事象 A，B，C を以下のように定める．

A ：「操作」を2回繰り返した時点で，初めてリセットされる．
B ：「操作」を3回繰り返した時点で，初めてリセットされる．
C ：「操作」を4回繰り返した時点で，初めてリセットされる．

A，B，C が起こる確率をそれぞれ $P(A)$，$P(B)$，$P(C)$ とすると，(1)，(2)より，

$$P(A)=\frac{1}{6},\ P(B)=\frac{1}{3},\ P(C)=\frac{1}{2}.$$

「操作」を9回繰り返した時点でテーブルの上に球が置かれていないのは，次のいずれかの場合である．

・B が3回起こる．
・A が3回，B が1回起こる．
・A，B，C が1回ずつ起こる．

これらは互いに排反であるから，求める確率は，

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3+\frac{4!}{3!}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\frac{1}{3}+3!\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{17}{81}}.$$

【解説】

(1) 本問のような確率を考える問題では，はじめに袋の中に入っている赤球2個を R_1，R_2，白球2個を W_1，W_2 とするなどして，すべての球を区別して計算することが基本である．

例えば，1，2，3回目に取り出す球の色が「赤白赤」である場合，

1回目に赤球を取り出す確率は $\dfrac{2}{4}$，

2回目に白球を取り出す確率は $\dfrac{2}{3}$，

3回目に赤球を取り出す確率は $\dfrac{1}{2}$

となり，

事象 A が起こったときの事象 B が起こる条件付き確率を $P_A(B)$ とすると，

$$P(A\cap B)=P(A)P_A(B)$$

乗法定理

を用いることで，「赤白赤」と取り出す確率は

$$\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}$$

となる．

「操作」を3回繰り返した時点でテーブルの上に球が置かれていないのは，1，2，3回目に袋から取り出した球の色が

赤白赤　または　白赤赤

となるときである．

この2つの事象は排反であるから，

2つの事象 A，B が排反であるとき，A または B が起こる確率は

$$P(A)+P(B)$$

排反な事象の和事象の確率

を用いて，求める確率は

$$\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

となる．

(2) テーブルの上に置いてあるすべての球を袋に戻すことを「リセット」とよぶことにすると，テーブルの上に球が置かれていない状態から「操作」を繰り返すとき，初めてリセットが起こるのは，

・「操作」を2回繰り返した時点

・「操作」を3回繰り返した時点

・「操作」を4回繰り返した時点

のいずれかである．このことに注意し，**【解答】**では，「操作」を4回繰り返した時点でテーブルの上に球が置かれていないのは，

(i) はじめの2回の「操作」の後に1度目のリセットが起こり，次の2回の「操作」の後に2度目のリセットが起こる，

(ii) 4回の「操作」の後に初めてリセットが起こる

のいずれかの場合になることに注目して，これらの確率を計算した．

(3) テーブルの上に球が置かれていない状態から「操作」を繰り返すとき，3つの事象 A，B，C を，

A :「操作」を2回繰り返した時点で，初めてリセットされる，

B :「操作」を3回繰り返した時点で，初めてリセットされる，

C :「操作」を4回繰り返した時点で，初めてリセットされる

と定めると，(1)，(2) より，

$$P(A)=\frac{1}{6},\ P(B)=\frac{1}{3},\ P(C)=\frac{1}{2}.$$

「操作」を9回繰り返した時点でテーブルの上に球が置かれていないのは，次のいずれかの場合である．

(ア) B が3回起こる．

(イ) A が3回，B が1回起こる．

(ウ) A，B，C が1回ずつ起こる．

2つの試行 T_1，T_2 が独立であるとき，T_1 で事象 A が起こり，T_2 で事象 B が起こる確率は

$$P(A)\cdot P(B)$$

独立な試行の確率

を用いると，(ア) の確率は，

$$\{P(B)\}^3=\left(\frac{1}{3}\right)^3.$$

(イ) の確率について．

n 個のもののうち，m_1 個，m_2 個，…，m_s 個がそれぞれ同じものであるとき，これら n 個のものを並べてできる順列の総数は

$$\frac{n!}{m_1!\,m_2!\cdots m_s!}\quad(m_1+m_2+\cdots+m_s=n)$$

同じものを含む順列の個数

を用いると，A，A，A，B の順列が

$$\frac{4!}{3!}=4\ (\text{通り})$$

であり，この4通りのそれぞれが起こる確率はいずれも

$$\{P(A)\}^3\cdot P(B)=\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\frac{1}{3}.$$

したがって，(イ) の確率は，

$$4\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\frac{1}{3}.$$

(ウ) の確率について．

A，B，C の順列が

$$3! = 6 \text{ (通り)}$$

であり，この6通りのそれぞれが起こる確率はいずれも

$$P(A)\cdot P(B)\cdot P(C) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}.$$

したがって，(ウ)の確率は，

$$6\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}.$$

あとは(ア)，(イ)，(ウ)の確率の和を求めればよい．

4 三角関数

【Ⅲ型　必須問題】

(配点　40点)

> a は実数の定数とし，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ で定義された関数 $f(\theta)$ を
>
> $$f(\theta) = 5(4\sin\theta\cos\theta + 3\cos^2\theta) + a(\sin\theta + 2\cos\theta) + 1$$
>
> とする．
>
> (1) $t = \sin\theta + 2\cos\theta$ とおく．
>
> (i) $f(\theta)$ を t を用いて表せ．
>
> (ii) θ が $0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲を動くとき，t のとり得る値の範囲を求めよ．
>
> (2) 方程式 $f(\theta) = 0$ が $0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲に異なる3つの解をもつとする．
>
> (i) a のとり得る値の範囲を求めよ．
>
> (ii) 3つの解の和が π となるような a の値を求めよ．

【配点】

(1) 18点.

(i) 8点.　(ii) 10点.

(2) 22点.

(i) 14点.　(ii) 8点.

【出題のねらい】

三角関数に関する方程式の解と，置き換えによって得られた2次方程式の解の対応関係の理解度をみる問題である．

【解答】

(1)(i) $t = \sin\theta + 2\cos\theta$ より，

$$\begin{aligned} t^2 &= \sin^2\theta + 4\sin\theta\cos\theta + 4\cos^2\theta \\ &= (1 - \cos^2\theta) + 4\sin\theta\cos\theta + 4\cos^2\theta \\ &= 4\sin\theta\cos\theta + 3\cos^2\theta + 1. \end{aligned}$$

よって，

$$4\sin\theta\cos\theta + 3\cos^2\theta = t^2 - 1$$

となるから，$f(\theta)$ を t を用いて表すと，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f(\theta)} &= 5(t^2 - 1) + at + 1 \\ &= \boldsymbol{5t^2 + at - 4}. \end{aligned}$$

(ii) $t = \sin\theta + 2\cos\theta$ は，

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}},\ \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}},\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

を満たす α を用いて

$$t = \sqrt{5}\sin(\theta + \alpha)$$

と変形できる．

よって，θ が $0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲を動くとき，$\theta + \alpha$ は

$$\alpha \leqq \theta + \alpha \leqq \pi + \alpha$$

の範囲を動くから，t のとり得る値の範囲は，

$$\sqrt{5}\sin(\pi + \alpha) \leqq t \leqq \sqrt{5}.$$

$\sqrt{5}\sin(\pi + \alpha) = -\sqrt{5}\sin\alpha = -2$ であるから，

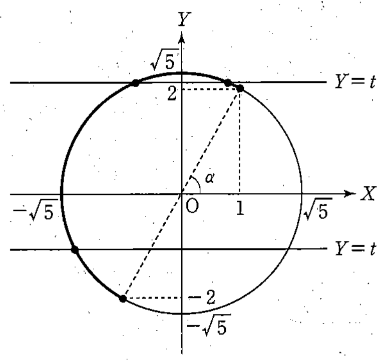
$$\boldsymbol{-2 \leqq t \leqq \sqrt{5}}.$$

(2)(i) 与えられた実数 t に対して，

$$t = \sqrt{5}\sin(\theta + \alpha),\ 0 \leqq \theta \leqq \pi$$

を満たす θ の個数は，次のようになる．

$$\begin{cases} 2 \leqq t < \sqrt{5} \text{ のとき，} 2\text{ 個,} \\ -2 \leqq t < 2,\ t = \sqrt{5} \text{ のとき，} 1\text{ 個,} \\ t < -2,\ \sqrt{5} < t \text{ のとき，} 0\text{ 個.} \end{cases}$$



したがって，方程式 $f(\theta) = 0$ が $0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲に異なる3つの解をもつ条件は，t の2次方程式

$$5t^2 + at - 4 = 0$$

が異なる2つの解をもち，その解が，

「$2 \leqq t < \sqrt{5}$ の範囲に1つあり」

かつ

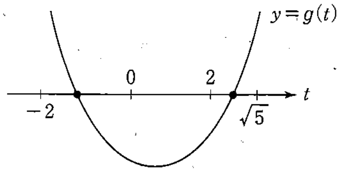
「$-2 \leqq t < 2$ または $t = \sqrt{5}$ の範囲に1つある」

ことである．

$$g(t) = 5t^2 + at - 4$$

とおくと，$g(0) = -4(<0)$ であるから，求める条件は，

$$\begin{cases} g(-2)=16-2a \geqq 0, \\ g(2)=16+2a \leqq 0, \\ g(\sqrt{5})=21+\sqrt{5}\,a>0. \end{cases}$$



よって，a のとり得る値の範囲は，

$$-\frac{21}{\sqrt{5}}<\boldsymbol{a} \leqq -8.$$

(ii) 方程式 $f(\theta)=0$ の 3 つの解を

$$\theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3 \quad (0 \leqq \theta_1<\theta_2<\theta_3 \leqq \pi)$$

とおく．

θ_1, θ_2 は

$$t=\sqrt{5}\sin(\theta+\alpha) \quad (2 \leqq t<\sqrt{5})$$

から得られる解であるから，

$$\frac{(\theta_1+\alpha)+(\theta_2+\alpha)}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

$$\theta_1+\theta_2=\pi-2\alpha.$$

したがって，$\theta_1+\theta_2+\theta_3=\pi$ であるとき，

$$\theta_3=2\alpha$$

となり，このとき，

$$\begin{aligned}\sqrt{5}\sin(\theta_3+\alpha)&=\sqrt{5}\sin 3\alpha\\ &=\sqrt{5}(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha)\\ &=\sqrt{5}\left\{3\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}-4\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^3\right\}\\ &=-\frac{2}{5}.\end{aligned}$$

よって，方程式 $g(t)=0$ の解の 1 つが

$t=-\dfrac{2}{5}$ となることから，

$$g\left(-\frac{2}{5}\right)=0.$$

$$-\frac{16}{5}-\frac{2}{5}a=0.$$

$$a=-8.$$

$$\left(\text{これは } -\frac{21}{\sqrt{5}}<a \leqq -8 \text{ を満たす}\right)$$

【解説】

(1)(i) $4\sin\theta\cos\theta+3\cos^2\theta$ を t を用いて表すことを考える．

$$\begin{aligned}t^2&=(\sin\theta+2\cos\theta)^2\\ &=\sin^2\theta+4\sin\theta\cos\theta+4\cos^2\theta\end{aligned}$$

であり，

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

三角関数の相互関係

を用いて整理すると，

$$t^2=(1-\cos^2\theta)+4\sin\theta\cos\theta+4\cos^2\theta.$$

$$4\sin\theta\cos\theta+3\cos^2\theta=t^2-1.$$

これを $f(\theta)$ の式に代入することで，

$$\begin{aligned}f(\theta)&=5(t^2-1)+at+1\\ &=5t^2+at-4\end{aligned}$$

となる．

(ii) まず，

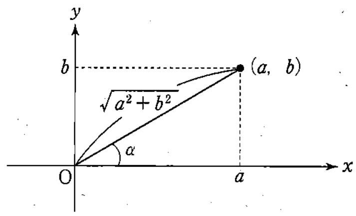
$(a,\ b) \neq (0,\ 0)$ のとき，

$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha).$

ただし，α は，

$$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

を満たす角である



三角関数の合成

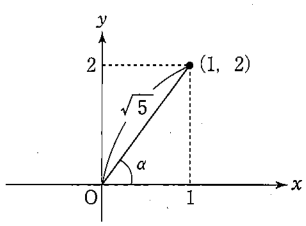
を用いて，$t=\sin\theta+2\cos\theta$ を

$$t=\sqrt{5}\sin(\theta+\alpha)$$

と変形した．ただし，α は，

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}},\quad \sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}},\quad 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$$

を満たす角である．



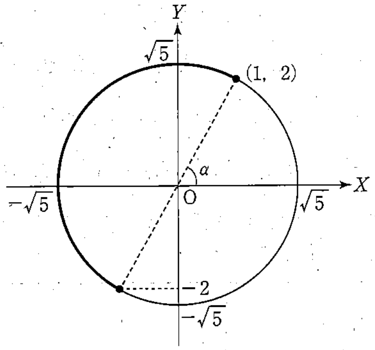
次に，$\sqrt{5}\sin(\theta+\alpha)$ のとり得る値の範囲を調べる．

θ が $0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲を動くとき，$\theta+\alpha$ は

$$\alpha \leqq \theta+\alpha \leqq \pi+\alpha$$

の範囲を動くから，

点 $(\sqrt{5}\cos(\theta+\alpha),\ \sqrt{5}\sin(\theta+\alpha))$ は，次図の円周上の太線部分を動く．



したがって，$\sqrt{5}\sin(\theta+\alpha)$ のとり得る値の範囲は，

$$\sqrt{5}\sin(\pi+\alpha) \leqq \sqrt{5}\sin(\theta+\alpha) \leqq \sqrt{5}.$$

ここで，

$$\sqrt{5}\sin(\pi+\alpha) = -\sqrt{5}\sin\alpha = -2$$

であるから，t のとり得る値の範囲は

$$-2 \leqq t \leqq \sqrt{5}$$

となる．

(2)(i)　θ の方程式 $f(\theta)=0$ を，t の2次方程式

$$5t^2+at-4=0 \quad \cdots(*)$$

に帰着して考えるために，まず，与えられた実数 t の値に対して，

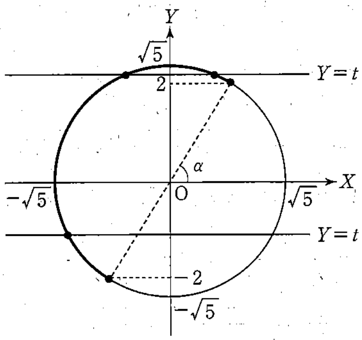
$$t=\sqrt{5}\sin(\theta+\alpha),\ 0 \leqq \theta \leqq \pi \quad \cdots(**)$$

を満たす θ の個数を求めた．

θ が $0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲を動くとき，点 $(\sqrt{5}\cos(\theta+\alpha),\ \sqrt{5}\sin(\theta+\alpha))$ は，次図の円周上の太線部分を動くから，

$$\left.\begin{array}{l} 2 \leqq t < \sqrt{5} \text{ のとき，} \\ \qquad (**) \text{ を満たす } \theta \text{ の個数は2個，} \\ -2 \leqq t < 2,\ t=\sqrt{5} \text{ のとき，} \\ \qquad (**) \text{ を満たす } \theta \text{ の個数は1個，} \\ t < -2,\ \sqrt{5} < t \text{ のとき，} \\ \qquad (**) \text{ を満たす } \theta \text{ の個数は0個} \end{array}\right\} \cdots(\bigstar)$$

となる．



(★)より，方程式 $f(\theta)=0$ が $0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲に異なる3つの解をもつための条件は，t の2次方程式(*)の解が，

「$2 \leqq t < \sqrt{5}$ の範囲に1つあり」

かつ

「$-2 \leqq t < 2$ または $t=\sqrt{5}$ の範囲に1つある」

ことであることがわかる．

あとは，$g(t)=5t^2+at-4$ とおくとき，$g(0)=-4(<0)$ となることから，方程式(*)が a の値にかかわらず正の解と負の解を1つずつもつことに着目して，a の範囲を求めればよい．

(ii)　a が(i)で求めた範囲にあるとき，θ の方程式 $f(\theta)=0$ の3つの解を

$$\theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3 \quad (0 \leqq \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 \leqq \pi),$$

t の方程式 $g(t)=0$ の2つの解を

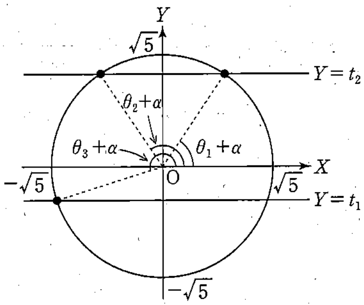
$$t_1,\ t_2 \quad (t_1 < t_2)$$

とおくと，

$$t_1=\sqrt{5}\sin(\theta_3+\alpha), \quad \cdots①$$

$$t_2=\sqrt{5}\sin(\theta_1+\alpha)=\sqrt{5}\sin(\theta_2+\alpha) \quad \cdots②$$

が成り立つ．



②より，

$$\frac{(\theta_1+\alpha)+(\theta_2+\alpha)}{2}=\frac{\pi}{2}$$

$(\theta_2+\alpha=\pi-(\theta_1+\alpha)$ と考えてもよい)

であるから，

$$\theta_1+\theta_2=\pi-2\alpha.$$

よって，$\theta_1+\theta_2+\theta_3=\pi$ であるとき，$\theta_3=2\alpha$ となる．

このとき，①より，

$$t_1=\sqrt{5}(\theta_3+\alpha)=\sqrt{5}\sin 3\alpha$$

となるから，

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

3倍角の公式

および，$\sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ を用いると，

$$t_1=\sqrt{5}(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha)$$
$$=\sqrt{5}\left\{3\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}-4\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^3\right\}$$
$$=-\frac{2}{5}$$

であることがわかる．

あとは，$g(t_1)=0$ すなわち，$g\left(-\frac{2}{5}\right)=0$ となることを用いて a の値を求め，求めた a の値が(i)で求めた a の範囲に含まれていること（あるいは，$2\leqq t_2<\sqrt{5}$ であること）を確認すればよい．

また，$\theta_3=2\alpha$ であることから，次のようにしても a の値を求めることができる．

((2)(ii)の部分的別解)

$\theta_3=2\alpha$ より，

$$f(2\alpha)=5(4\sin2\alpha\cos2\alpha+3\cos^2 2\alpha)+a(\sin2\alpha+2\cos2\alpha)+1=0.$$

ここで，

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{4}{5},$$
$$\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2-1=-\frac{3}{5}.$$

したがって，

$$5\left\{4\cdot\frac{4}{5}\left(-\frac{3}{5}\right)+3\left(-\frac{3}{5}\right)^2\right\}+a\left\{\frac{4}{5}+2\left(-\frac{3}{5}\right)\right\}+1=0.$$
$$-\frac{2}{5}a-\frac{16}{5}=0.$$
$$a=-8.$$

((2)(ii)の部分的別解終り)

なお，$a=-8$ のとき，方程式 $g(t)=0$ の解は $t=-\frac{2}{5}$，2 となる．

5 数列の極限

【Ⅲ型 選択問題】

（配点 40点）

数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n=\sqrt{4n-3}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\cdots)$$

により定義する．xy 平面上の曲線 $y=x^2$ 上に点列 $\{P_n\}$ を $P_n(a_n,\ a_n^2)$ により定める．P_n から x 軸，y 軸に下ろした垂線の足をそれぞれ Q_n，R_n とし，台形 $P_nQ_nQ_{n+1}P_{n+1}$，台形 $P_nR_nR_{n+1}P_{n+1}$ の面積をそれぞれ S_n，T_n とする．

(1) S_n，T_n をそれぞれ n を用いて表せ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{S_n}=\alpha$ とおくとき，α の値を求めよ．

(3) (2)の α に対して，$n\to\infty$ のとき数列 $\left\{n^p\left(\frac{T_n}{S_n}-\alpha\right)\right\}$ が 0 以外の有限な値に収束するような定数 p の値を求めよ．また，そのときの極限値を求めよ．

【配点】

(1) 10点．

(2) 15点．

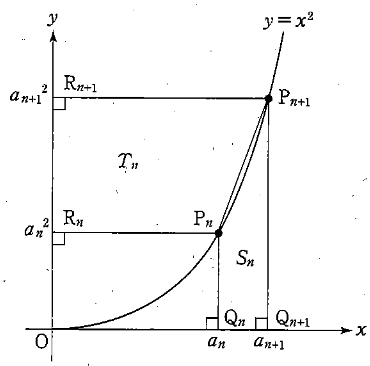
(3) 15点．

【出題のねらい】

分母の有理化や分子の有理化などの適切な式変形を行うことで，数列の極限が正しく求められるかをみる問題である．

【解答】

(1)



$P_n(a_n,\ a_n^2)$，$Q_n(a_n,\ 0)$，$R_n(0,\ a_n^2)$，

$a_n<a_{n+1}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ より，

$$S_n=\frac{1}{2}(P_nQ_n+P_{n+1}Q_{n+1})\cdot Q_nQ_{n+1}$$
$$=\frac{1}{2}(a_n^2+a_{n+1}^2)(a_{n+1}-a_n)$$
$$=\frac{1}{2}\{(4n-3)+(4n+1)\}\times(\sqrt{4n+1}-\sqrt{4n-3})$$
$$=\boldsymbol{(4n-1)(\sqrt{4n+1}-\sqrt{4n-3})},$$

$$T_n=\frac{1}{2}(P_nR_n+P_{n+1}R_{n+1})\cdot R_nR_{n+1}$$
$$=\frac{1}{2}(a_n+a_{n+1})(a_{n+1}^2-a_n^2)$$
$$=\frac{1}{2}(\sqrt{4n-3}+\sqrt{4n+1})\times\{(4n+1)-(4n-3)\}$$
$$=\boldsymbol{2(\sqrt{4n+1}+\sqrt{4n-3})}.$$

(2) (1) より，

$$\frac{T_n}{S_n}$$

$$=\frac{2(\sqrt{4n+1}+\sqrt{4n-3})}{(4n-1)(\sqrt{4n+1}-\sqrt{4n-3})}$$

$$=\frac{2(\sqrt{4n+1}+\sqrt{4n-3})^2}{(4n-1)(\sqrt{4n+1}-\sqrt{4n-3})(\sqrt{4n+1}+\sqrt{4n-3})}$$

$$=\frac{2\{(4n+1)+2\sqrt{(4n+1)(4n-3)}+(4n-3)\}}{(4n-1)\{(4n+1)-(4n-3)\}}$$

$$=\frac{4n-1+\sqrt{(4n+1)(4n-3)}}{4n-1} \quad \cdots ①$$

$$=\frac{4-\frac{1}{n}+\sqrt{\left(4+\frac{1}{n}\right)\left(4-\frac{3}{n}\right)}}{4-\frac{1}{n}}.$$

よって，

$$\alpha=\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{S_n}=\frac{4-0+\sqrt{(4+0)(4-0)}}{4-0}=\mathbf{2}.$$

(3) (2) より，$\alpha=2$ であり，① より，

$$\frac{T_n}{S_n}-\alpha$$

$$=\frac{4n-1+\sqrt{(4n+1)(4n-3)}}{4n-1}-2$$

$$=\frac{\sqrt{(4n+1)(4n-3)}-(4n-1)}{4n-1}$$

$$=\frac{\{\sqrt{(4n+1)(4n-3)}-(4n-1)\}\{\sqrt{(4n+1)(4n-3)}+(4n-1)\}}{(4n-1)\{\sqrt{(4n+1)(4n-3)}+(4n-1)\}}$$

$$=\frac{(4n+1)(4n-3)-(4n-1)^2}{(4n-1)\{\sqrt{(4n+1)(4n-3)}+4n-1\}}$$

$$=\frac{-4}{(4n-1)\{\sqrt{(4n+1)(4n-3)}+4n-1\}}.$$

したがって，

$$n^p\left(\frac{T_n}{S_n}-\alpha\right)$$

$$=\frac{-4n^p}{(4n-1)\{\sqrt{(4n+1)(4n-3)}+4n-1\}}$$

$$=n^{p-2}\cdot\frac{-4}{\left(4-\frac{1}{n}\right)\left\{\sqrt{\left(4+\frac{1}{n}\right)\left(4-\frac{3}{n}\right)}+4-\frac{1}{n}\right\}}.$$

ここで，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-4}{\left(4-\frac{1}{n}\right)\left\{\sqrt{\left(4+\frac{1}{n}\right)\left(4-\frac{3}{n}\right)}+4-\frac{1}{n}\right\}}$$

$$=\frac{-4}{(4-0)\{\sqrt{(4+0)(4-0)}+4-0\}}$$

$$=-\frac{1}{8}$$

であり，

$$\lim_{n\to\infty}n^{p-2}=\begin{cases}0 & (p<2 \text{ のとき}),\\ 1 & (p=2 \text{ のとき}),\\ \infty & (p>2 \text{ のとき})\end{cases}$$

であるから，数列 $\left\{n^p\left(\frac{T_n}{S_n}-\alpha\right)\right\}$ が 0 以外の有限な値に収束するような p の値は，

$$p=\mathbf{2}.$$

また，そのときの極限値は，

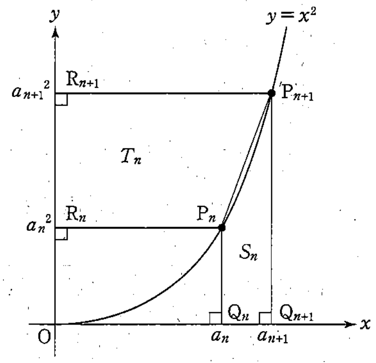
$$1\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}.$$

【解説】

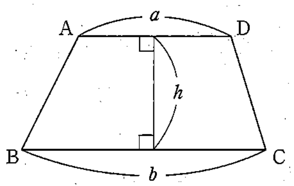
(1) $P_n(a_n,\ a_n^2)$，$Q_n(a_n,\ 0)$，$R_n(0,\ a_n^2)$ であり，$a_n=\sqrt{4n-3}$ より，

$$a_n<a_{n+1}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が成り立つことに注意すると，次図のようになる．



あとは，



図において，台形 ABCD の面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}(a+b)h$$

台形の面積

を用いればよい．

(2) (1) より，

$$\frac{T_n}{S_n}=\frac{2(\sqrt{4n+1}+\sqrt{4n-3})}{(4n-1)(\sqrt{4n+1}-\sqrt{4n-3})}$$

であり，このままでは $\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{S_n}$ の値を求めることは

できない．

そこで，【解答】では，$\dfrac{T_n}{S_n}$ に対して

$a>0,\ b>0,\ a\neq b$ のとき，

$$\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$$

分母の有理化

を用いて，

$$\frac{T_n}{S_n}=\frac{4n-1+\sqrt{(4n+1)(4n-3)}}{4n-1} \quad \cdots ①$$

と変形したあと，

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が収束して，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\beta$ のとき，

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\alpha+\beta$$
$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\alpha-\beta$$
$$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\alpha\beta$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\alpha}{\beta}\quad (\text{ただし，}\beta\neq 0)$$

極限値の性質

を用いて，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n-1+\sqrt{(4n+1)(4n-3)}}{4n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{1}{n}+\sqrt{\left(4+\frac{1}{n}\right)\left(4-\frac{3}{n}\right)}}{4-\frac{1}{n}}=\frac{4-0+\sqrt{(4+0)(4-0)}}{4-0}=2$$

とした．

(3) (2) より，$\alpha=2$ であるから，① より，

$$n^p\left(\frac{T_n}{S_n}-\alpha\right)=n^p\left\{\frac{4n-1+\sqrt{(4n+1)(4n-3)}}{4n-1}-2\right\}=n^p\left\{\frac{\sqrt{(4n+1)(4n-3)}-(4n-1)}{4n-1}\right\}$$

となり，

$a>0,\ b>0$ のとき，

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

分子の有理化

を用いると，

$$n^p\left(\frac{T_n}{S_n}-\alpha\right)=\frac{-4n^p}{(4n-1)\{\sqrt{(4n+1)(4n-3)}+4n-1\}}$$

となる．

$n\to\infty$ のときに $\dfrac{(\text{分母})}{n^2}$ が 0 以外の値に収束することに着目し，分母と分子を n^2 で割ると，

$$n^p\left(\frac{T_n}{S_n}-\alpha\right)=n^{p-2}\cdot\frac{-4}{\left(4-\frac{1}{n}\right)\left\{\sqrt{\left(4+\frac{1}{n}\right)\left(4-\frac{3}{n}\right)}+4-\frac{1}{n}\right\}}. \quad \cdots ②$$

ここで，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-4}{\left(4-\frac{1}{n}\right)\left\{\sqrt{\left(4+\frac{1}{n}\right)\left(4-\frac{3}{n}\right)}+4-\frac{1}{n}\right\}}=\frac{-4}{(4-0)\{\sqrt{(4+0)(4-0)}+4-0\}}=-\frac{1}{8}. \quad \cdots ③$$

また，

$$\lim_{n\to\infty}n^k=\begin{cases}0 & (k<0\ \text{のとき}),\\ 1 & (k=0\ \text{のとき}),\\ \infty & (k>0\ \text{のとき})\end{cases}$$

数列 $\{n^k\}$ の極限

に注意すると，

$$\lim_{n\to\infty}n^{p-2}=\begin{cases}0 & (p<2\ \text{のとき}),\\ 1 & (p=2\ \text{のとき}),\\ \infty & (p>2\ \text{のとき}).\end{cases} \quad \cdots ④$$

よって，②，③，④ より，

$$\lim_{n\to\infty}n^p\left(\frac{T_n}{S_n}-\alpha\right)=\begin{cases}0 & (p<2\ \text{のとき}),\\ -\frac{1}{8} & (p=2\ \text{のとき}),\\ -\infty & (p>2\ \text{のとき})\end{cases}$$

となることがわかる．

6 複素数平面

【Ⅲ型　選択問題】

（配点　40点）

> 0 でない複素数 α, β が
> $$\frac{\beta}{\alpha}=2(\cos\theta+i\sin\theta)\quad(0\leqq\theta\leqq\pi)$$
> を満たすとする．また，複素数平面上で 0, α, β が表す点をそれぞれ O, A, B とする．
> ただし，i は虚数単位とする．
> (1) $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ のとき，α を極形式で表せ．
> また，β を θ を用いて極形式で表せ．
> (2) O を中心とする半径 1 の円を C とする．A が C 上を動くとき，
> (i) C と線分 AB（両端を含む）がただ 1 つの共有点をもつような θ のとり得る値の範囲を求めよ．
> (ii) θ が(i)の範囲を動き，かつ α, β が（β の虚部）≧（α の虚部）を満たすとき，線分 AB が通過する領域の面積を求めよ．

【配点】

(1)　10 点．

(2)　30 点．

　(i)　12 点．(ii)　18 点．

【出題のねらい】

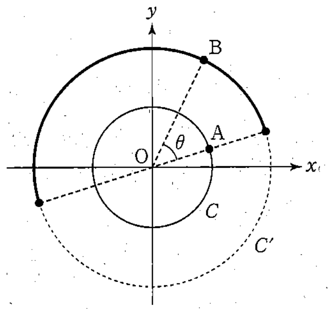
複素数を極形式で表すことができるか，また，複素数平面上の点の位置関係を把握し，図形的な考察を進めることができるかをみる問題である．

【解答】

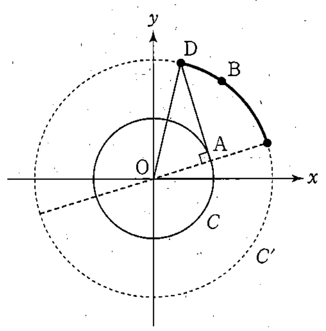
(1)
$$\alpha=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}.$$

また，
$$\beta=2(\cos\theta+i\sin\theta)\alpha$$
$$=2(\cos\theta+i\sin\theta)\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=2\left\{\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\right\}.$$

(2) A は C 上にあるから，
$$|\alpha|=1.$$
そこで，
$$\alpha=\cos\varphi+i\sin\varphi\quad(0\leqq\varphi<2\pi)$$
とおくと，(1) と同様にして，
$$\beta=2(\cos\theta+i\sin\theta)\alpha$$
$$=2\{\cos(\theta+\varphi)+i\sin(\theta+\varphi)\}.$$
したがって，
$$|\beta|=2$$
であり，
$$\arg\beta=\theta+\varphi=\theta+\arg\alpha.$$
よって，A を固定して θ を $0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲で変化させるとき，B は O を中心とする半径 2 の円 C' 上の，次図のような半円上を動く．



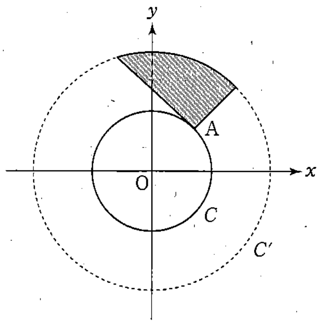
(i) A における C の接線と B が動く部分の半円との交点を D とする．



C と線分 AB がただ 1 つの共有点をもつとき，B は前図の太線部分を動く．

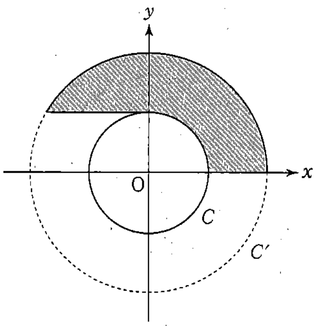
ここで，
$$\mathrm{OD}=2,\ \mathrm{OA}=1,\ \angle\mathrm{OAD}=\frac{\pi}{2}$$
より，
$$\cos\angle\mathrm{AOD}=\frac{1}{2}.$$
$$\angle\mathrm{AOD}=\frac{\pi}{3}.$$
$\theta=\angle\mathrm{AOB}$ であるから，図より，θ のとり得る値の範囲は，
$$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{3}.$$

(ii)(ア)　$0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$ のとき．

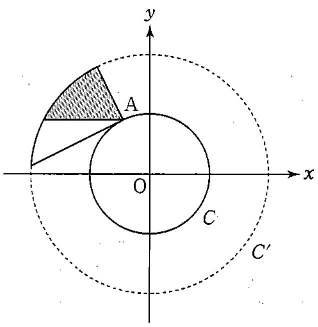


$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3}$ のとき，(β の虚部)$\geqq$(α の虚部) は成り立つから，A を固定したとき，線分 AB が通過する領域は前図の網掛け部分である(境界を含む)．

したがって，A が $0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$ を満たして動くとき，線分 AB が通過する領域は，次図の網掛け部分である(境界を含む)．

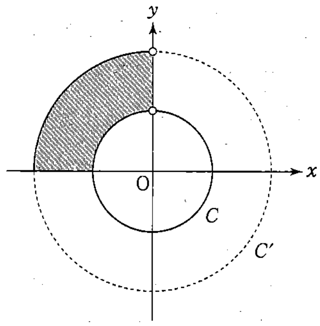


(イ)　$\frac{\pi}{2} < \varphi \leqq \pi$ のとき．

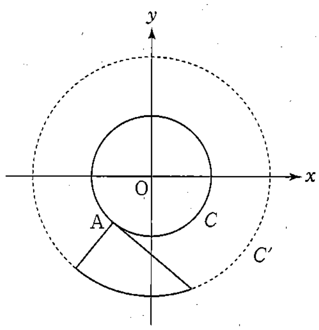


(β の虚部)$\geqq$(α の虚部) が成り立つのは，$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3}$ の一部であり，A を固定したとき，線分 AB が通過する領域は前図の網掛け部分である(境界を含む)．

したがって，A が $\frac{\pi}{2} < \varphi \leqq \pi$ を満たして動くとき，線分 AB が通過する領域は，次図の網掛け部分である(境界は点線の部分のみ除く)．



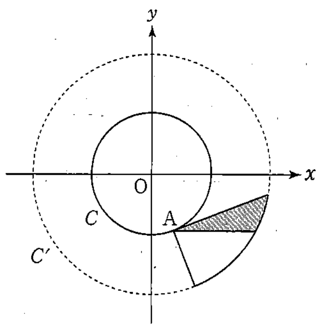
(ウ)　$\pi < \varphi < \frac{3}{2}\pi$ のとき．



$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3}$ のとき，(β の虚部)$\geqq$(α の虚部) が成り立つことはない．

したがって，条件を満たす線分 AB は存在しない．

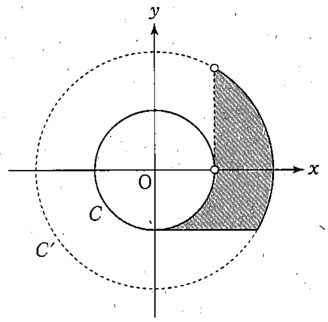
(エ)　$\frac{3}{2}\pi \leqq \varphi < 2\pi$ のとき．



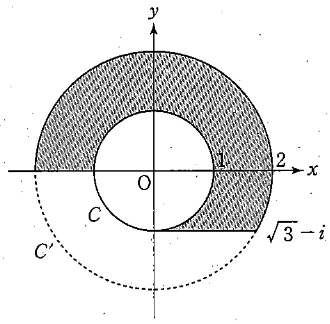
(β の虚部)$\geqq$(α の虚部) が成り立つのは，

$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{3}$ の一部であり，A を固定したとき，線分 AB が通過する領域は前図の網掛け部分である(境界を含む).

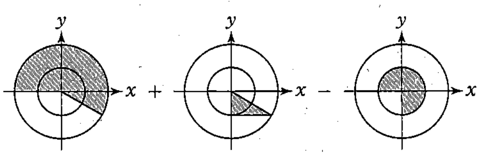
したがって，A が $\dfrac{3}{2}\pi \leqq \varphi < 2\pi$ を満たして動くとき，線分 AB が通過する領域は，次図の網掛け部分である(境界は点線の部分のみ除く).



(ア)～(エ)より，線分 AB が通過する領域は，次図の網掛け部分である(境界を含む).



よって，求める面積は，



$$= \frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{7}{6}\pi + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2\cdot\sin\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{3}{2}\pi$$

$$= \boldsymbol{\frac{19}{12}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

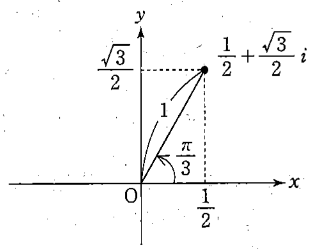
【解説】

(1) 複素数 $z\,(z \neq 0)$ を

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \quad (r > 0)$$

の形に表したとき，この表し方を複素数 z の極形式という．具体的な複素数 z の極形式を得るには，複素数平面上で z が表す点 P をとり，線分 OP の長さを r，動径 OP の表す角を θ とすればよい．

$\alpha = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ については，次図のようになる．



これより，α の極形式は

$$\alpha = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$$

となる．

β については，

$$\begin{cases} z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), \\ z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \end{cases}$$

のとき，

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$$

極形式で表された複素数の積

を用いると，

$$\begin{aligned} \beta &= 2(\cos\theta + i\sin\theta)\alpha \\ &= 2(\cos\theta + i\sin\theta)\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \\ &= 2\left\{\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\right\} \end{aligned}$$

となる．

(2)(i) (1)と同様にして，$|\alpha| = 1$ のとき，

$$|\beta| = 2$$

であり，

$$\arg\beta = \theta + \arg\alpha$$

が成り立つ．

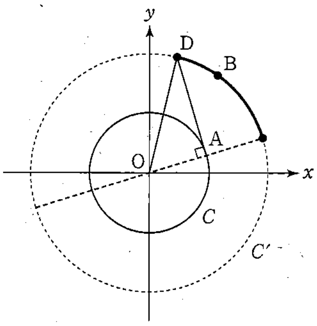
これより，B は O を中心とする半径 2 の円周上にあり，

$$\angle\mathrm{AOB} = \theta$$

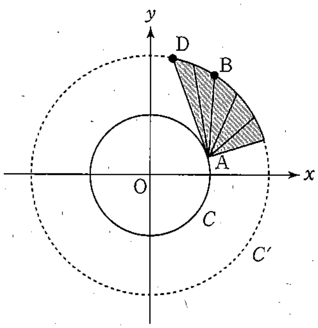
である．

このことから，A における C の接線上に B がくるときの θ の値を考察することにより，θ のとり得る値の範囲を求めることができる．

(ii) θ が $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{3}$ の範囲を動くとき，Aを固定すれば，B の動く範囲は次図の太線部分のようになる．



したがって，線分 AB の通過する範囲は次図の網掛け部分のようになり，A の位置によらず一定の形となる．



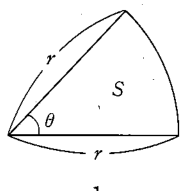
ただし，B がこの範囲を動くとき，条件

$$(\beta \text{ の虚部}) \geqq (\alpha \text{ の虚部})$$

は，A の位置によって，つねに成り立ったり，一部のみ成り立ったり，まったく成り立たなかったりする．

そこで，**【解答】**では，α の偏角 φ について場合分けをして，線分 AB が通過する領域を場合ごとに求め，最後にそれらをまとめた．

得られた領域は，境界線に円弧が含まれている．このような図形の面積を求めるときは，円弧に対応する扇形の面積に着目すればよい．



$$S=\frac{1}{2}r^2\theta$$

扇形の面積